平成20年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

平成19年8月28日（火）　　13時00分－17時00分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で10ページである。
3. 答案用紙は, 各問につき1枚, 合計4枚配布してある．確実に配布されていることを確かめよ。
4. 問題は数学2問, 物理学2問, 天文学2問の計6問ある．このうちから, 数学と物理学をそれぞれ少なくとも1題を含む4題を選んで解答せよ。
5. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ。問題番号は, 数学1, 物理学2, 天文学1などのように, 科目と番号で記入せよ。
6. 解答は, 各問ごとに1枚の答案用紙を使用せよ．必要なら裏ページを使用してもよい.
7. 解答出来ない場合でも, 4枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出せよ。
8. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。
9. 草稿用紙は別に4枚配布するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること。

（草稿に使ってもよい。ただし，切り離さないで用いよ。）

［数学 I］

$\vartheta(x) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2 x)$ （但し $x>0$）で定義されるテータ関数について，$\vartheta(x)$ と $\vartheta(x^{-1})$ の間の関係式を導きたい。以下の設問に答えよ。但し，以下では，x 及び t は実数，z は複素数，T 及び α は正の実数，m 及び n は整数とする。また，$i^2=-1$ である。

1. (a) 関数 $\exp(-z^2)$ を，下図に示した様な複素平面上の頂点 $(-T,0)$，$(+T,0)$，$(+T,+\alpha)$，$(-T,+\alpha)$ からなる矩形の積分路に沿って積分した値を答えよ。

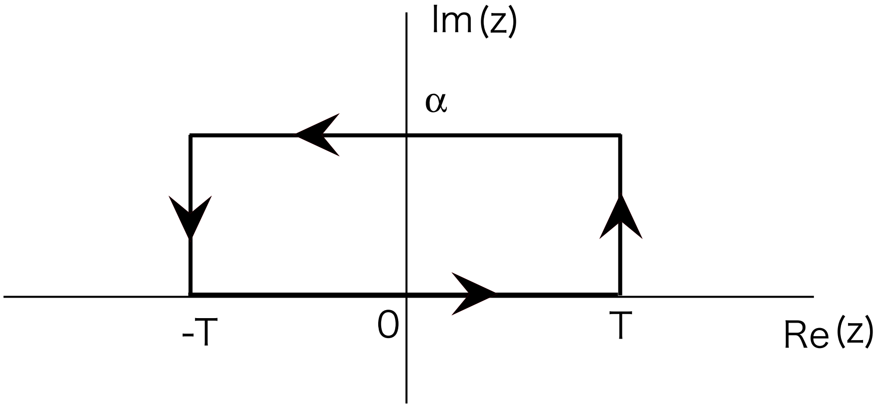

図 1: 複素平面上の積分路

   (b) 上記設問において $T \to \infty$ とした場合を考えることにより，関数 $\exp(-z^2)$ を，実軸に平行な $\mathrm{Im}\,(z) = \alpha$ に沿って積分した $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x+i\alpha)^2]\,dx$ の値を求めよ。但し，$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}$ である。

2. 周期 2ℓ の連続関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(in\frac{\pi}{\ell}t\right) \tag{1}$$

とフーリエ級数展開したときのフーリエ展開係数 a_n を関数 $f(t)$ の積分で表せ。

3. 上記設問 2 で考えた (1) 式の周期関数 $f(t)$ として，m についての級数である

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[-\pi(t+m)^2 x] \tag{2}$$

を考え，そのフーリエ級数展開を考える。但し，$x>0$ とする。

   (a) (2) 式の $f(t)$ の周期はいくつか。
   (b) 設問 2 で求めたフーリエ展開係数 a_n の中の $f(t)$ に (2) 式の右辺を代入し，a_n を m についての級数和を積分した形で表せ。
   (c) 上記設問で求めた表記における積分と和の順序を交換したうえで，積分の変数を t から $t' = t+m$ に変数変換し，a_n を t' についての積分項の m についての和として表せ。
   (d) 上記結果を利用し，積分範囲を連結させてから t' についての積分を実行して，a_n を n と x で表せ。

4. (2) 式の $f(t)$ において $t=0$ の場合を考え，それを $x(>0)$ の関数と見なすと，$f(0)$ はテータ関数に他ならない。このことを利用して，$\vartheta(x)$ と $\vartheta\left(x^{-1}\right)$ の間に成り立つ関係式を導け。

[数学 2]

3 次元実単位ベクトル $\vec{N}$ の周りに右ねじで角度 θ だけ回す回転操作（以下で R と呼ぶ）を考える。$\vec{N}$ が単位ベクトルであること（$|\vec{N}|=1$）に注意しながら以下の各問に答えよ。

1. まず，$\vec{N}$ および θ が与えられたとき，回転操作 R によってベクトルがどのように変化するかを導こう。

   (a) 任意の 3 次元実ベクトル $\vec{A}$ が，$\vec{N}$ を用いて

   $$\vec{A}=\left(\vec{N}\cdot\vec{A}\right)\vec{N}+\left(\vec{N}\times\vec{A}\right)\times\vec{N}$$

   と表現できることを示せ。ただし $\cdot$ および $\times$ は，ベクトルの内積およびベクトル積である。

   (b) $\vec{A}$ が回転操作 R によって $\vec{B}$ に移るとき，$\vec{B}$ を $\vec{A}$，$\vec{N}$ および θ で表現せよ。

2. 次に，与えられた条件から $\vec{N}$ および θ をどのように決定するかを考えよう。

   (a) 始点 O を共有する 3 次元実ベクトルのペア $\vec{P}$ および $\vec{Q}$ を，単位ベクトル $\vec{N}$ の周りの角度 θ の回転操作により，同じ始点 O を共有する別の 3 次元実ベクトルのペア $\vec{U}$ および $\vec{V}$ に同時に移す（$\vec{P}\to\vec{U}$ および $\vec{Q}\to\vec{V}$ とする）ことは，ある条件下で可能となる。その必要十分条件を述べよ。ただし $\vec{P}\neq\vec{Q}$ かつ $\vec{U}\neq\vec{V}$ が成り立つものとする。

   (b) 前問で，そのときの $\vec{N}$ および θ を，ベクトル $\vec{X}\equiv\vec{U}-\vec{P}$ および $\vec{Y}\equiv\vec{V}-\vec{Q}$ を用いて表せ。

［物理学 1］

以下の設問に答えよ。

1. 粒子数 N から成る気体のヘルムホルツの自由エネルギー F は，化学ポテンシャルを μ， 熱力学的ポテンシャルを Ω とすると $F = N\mu + \Omega$ と書ける。 一般にグランドカノニカル分布ではボゾンの熱力学的ポテンシャルは

$$\Omega = kT \sum_i \log[1 - \exp\{(\mu - \epsilon_i)/(kT)\}]$$

である (k はボルツマン定数, ϵ_i は i 番目の量子状態のボゾン 1 個のエネルギーで，和は全ての量子状態について取る)。

以下，体積 V の箱に閉じ込められている温度 T の光子気体について考える。なお光子気体の化学ポテンシャルはゼロ ($\mu = 0$) である。

(a) 体積 V の光子気体について, 角振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある量子状態の数を書け。

(b) グランドカノニカル分布を用いて，温度 T，体積 V の光子気体のヘルムホルツの自由エネルギーは $F = -CVT^4$ と書けること，かつ C が正の定数であることを示せ。

(c) この定数 C は放射定数 a と $C = a/3$ の関係がある。熱力学第一法則と $F = U - TS$ (U は内部エネルギー，S はエントロピー) であることを用いて，この気体の圧力 P，内部エネルギー U はそれぞれ

$$P = \frac{aT^4}{3}, \quad U = aT^4 V$$

となることを示せ。

2. 次に，温度 T，体積 V の光子と理想気体から成る系を考える。この系の圧力と内部エネルギーがそれぞれ次のように与えられるとする (K は定数)。

$$P = \frac{aT^4}{3} + \frac{KT}{V}, \quad U = aT^4 V + \frac{3KT}{2}$$

(a) この系のエントロピー S を求めたい。熱力学第一法則を用いて dS を dT と dV で表せ。

(b) dS を積分し，エントロピー S を V と T で表せ。

(c) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を V と T で表せ。

［物理学 2］

図 1 のように誘電体でできた厚さ a の板 A（誘電率 ϵ，透磁率 μ_0）がある。また A の上下の空間は真空であり，誘電率は ϵ_0，透磁率は μ_0 である。この誘電体の板に $+z$ 方向から x 方向に直線偏光した平面電磁波が入射した。この平面電磁波は

電場成分；$E_x(z,t) = E_0 \exp\{i(\omega t + kz)\}$, $E_y(z,t) = 0$
磁場成分；$H_y(z,t) = H_0 \exp\{i(\omega t + kz)\}$, $H_x(z,t) = 0$

と書ける。ただし $\omega(=2\pi c/\lambda$，λは波長, c は光速）は角周波数，$k(=\omega/c)$ は波数，t は時間，$i = \sqrt{-1}$ であり，E_x，E_y，H_x，H_y はそれぞれ電場，磁場の x，y 成分で，E_0，H_0 は定数である。以下の問いに答えよ。

1. 入射した平面電磁波の，真空と誘電体 A の境界面での反射率 η を求めよ。

2. 誘電体 A から真空への境界面を通過する電磁波は透過と反射をおこす。2 つの境界面で一度ずつ反射されて誘電体 A を透過した電磁波はどうなるか $z = -2a$ での $E_x(z,t)$ を示せ。

3. 誘電体 A を透過する電磁波の単位時間あたりのエネルギー P を η の関数として求めよ。また P が最大になる波長 λ と誘電体の厚さ a の関係を求めよ。

4. 図 2 のように誘電体 A の下に平行金属線 B を置く。金属線は xy 面に平行に張られ，金属線の直径は入射電磁波の波長に比べ十分に細く，また張られる間隔も波長に比べ十分に小さいとする。この B は z 軸を中心に回転できるものとする。回転角度 θ は，金属線が x 方向を向いた時を 0 とし，$+z$ 軸向きに時計回りに定義する。誘電体 A を透過する電磁波の透過率が最大になる条件を与える λ と a の下で B を回転させた。この装置を透過する電磁波の単位時間あたりのエネルギーは $\theta = 0$ 度と $\theta = 90$ 度の場合どうなるか。金属線に沿ってしか電子が動けないことを考慮し，定性的に説明せよ。

5. 設問 4 の場合，この装置を透過する電磁波の単位時間あたりのエネルギーを回転角度 θ の関数として表せ。

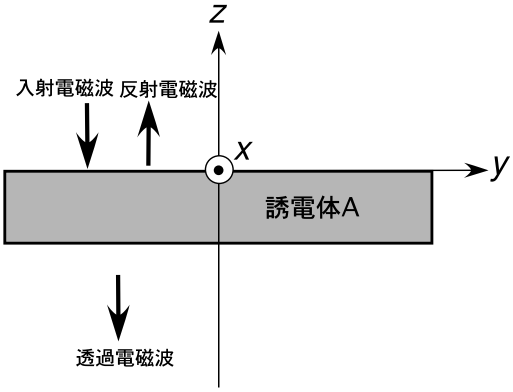

図 1

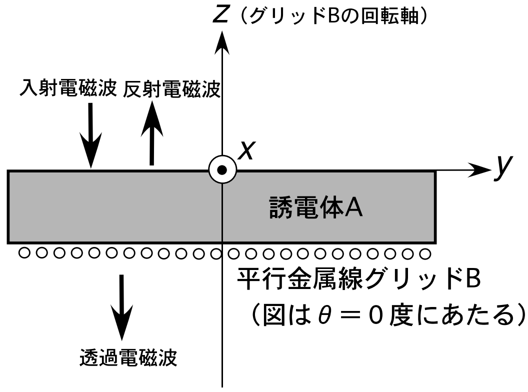

図 2

［天文学 1］

銀河団には 10^8 K 近い高温のプラズマガスが充満している。このプラズマガスは (i) X 線の波長域を中心とした熱制動放射を出すとともに，(ii) 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の光子を逆コンプトン散乱して CMB のスペクトルをゆがめる。プラズマガスのこれら 2 つの性質を用いると，観測者から銀河団までの距離を測ることができる。
プラズマガスの電子の温度が $T_{\rm e}$，電子の数密度 $n_{\rm e}$ が

$$n_{\rm e}(r) = \frac{n_0}{[1+(r/r_{\rm c})^2]^{3/2}} \tag{1}$$

で記述される等温で球対称な銀河団について，下記の問に答えよ。ここで，r は銀河団中心からの距離，$r_{\rm c}$ (定数) は銀河団のコア半径，n_0 (定数) は銀河団中心での電子の数密度である。なお，この銀河団の赤方偏移は 1 より十分小さいとする。また，熱制動放射の自己吸収は無視できるとする。

1. 単位時間あたり，単位体積あたり，単位周波数あたりのプラズマガスの熱制動放射のエネルギー ϵ_ν は

$$\epsilon_\nu = \alpha n_{\rm e}^2 T_{\rm e}^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_{\rm e}}\right) \tag{2}$$

と表せる。ここで，ν は周波数，h はプランク定数，k はボルツマン定数，α は物理定数だけで決まる定数である。

(a) 電子温度 $T_{\rm e}$，電子数密度 $n_{\rm e}$ の単位体積のプラズマガスから，単位時間あたりに出てくる熱制動放射の全エネルギー ϵ の表式を求めよ。

(b) この銀河団全体の熱制動放射の光度 L (単位時間あたりに出てくる全エネルギー) の表式を求めよ。

2. CMB の光子は，プラズマガスの電子との逆コンプトン散乱によって電子からエネルギーを受け取る。逆コンプトン散乱では光子の数は保存するため，CMB のレイリー・ジーンズ波長域では，スペクトルの強度が下がり，銀河団の無い方向の CMB の温度よりも低い温度が観測される。ここで，CMB の温度とは CMB を黒体放射であると見なしたときに対応する温度 (約 2.7 K) のことである。

ある銀河団を観測したとき，天球面上のある視線方向での CMB のレイリー・ジーンズ波長域の温度の低下 $\Delta T_{\rm r}$ は

$$\Delta T_{\rm r} = -2T_{\rm r}\sigma_{\rm T}\frac{kT_{\rm e}}{m_{\rm e}c^2}\int n_{\rm e} ds \tag{3}$$

と表される。ここで，$T_{\rm r}$ は銀河団の無い方向の CMB の温度，$\sigma_{\rm T}$ はトムソン散乱の断面積，c は光速度，$m_{\rm e}$ は電子の質量である。s は視線方向に取った直線座標であり，$\int n_{\rm e} ds$ は，その視線方向における銀河団の電子の柱密度を意味する。この式から分かるように，$\Delta T_{\rm r}$ は観測者から銀河団までの距離に依存しない。

この銀河団の中心を通る視線での温度の低下 $\Delta T_{\rm r}^{\rm c}$ の表式を求めよ。

3. 観測者からこの銀河団までの距離を d とする。ここで，$d \gg r_{\rm c}$ であり，$\sin(r_{\rm c}/d) = r_{\rm c}/d$ と近似できるとする。また，赤方偏移による波長の伸びは無視できるとし，光度距離と角径距離は等しいとする。

(a) 銀河団全体からの熱制動放射のフラックス (観測者の位置で銀河団に正対した単位面積あたり単位時間あたりに入射するエネルギー) $f_{\rm X}$ を，L と d で表せ。

(b) この銀河団について観測者が直接測れる量は，$T_{\rm e}$ (これは観測される熱制動放射のスペクトルの形から求まる)，$T_{\rm r}$，$\Delta T_{\rm r}^{\rm c}$，$f_{\rm X}$，そして， 天球面上における熱制動放射の表面輝度分布の見かけのコア半径 $\theta_{\rm c}$ の 5 個である。問 1，問 2，および問 3 (a) の結果を用いて，距離 d を，これら 5 つの観測量と物理定数だけで表せ。ここで，$\theta_{\rm c} = r_{\rm c}/d$ という関係を用いてよい。

(c) 同一の電子温度と密度分布を持つ 2 つの銀河団が視線方向に並んでいるとする。ここで，2 つの銀河団の間隔は，観測者からこれらの銀河団までの距離に比べて十分短く，且つ，互いのプラズマガスの混合が無視できる程度に長いとする。したがって，観測者から見ると 2 つの銀河団は完全に重なっており，$\theta_{\rm c}$ も同一の値となる。A 君は，銀河団が 1 つしかないと思い込んで観測し，問 3 (b) のやりかたで 5 つの観測量から距離を求めた。A 君の得た距離を 2 つの銀河団までの真の距離と比較せよ。

［天文学 2］

図 1 の写真は，天の川のある部分を可視光で撮影したものである。黒い点は星である。星から放射された光のうち，ダスト (固体微粒子）により散乱されたものは散乱光になり，写真に見られるように広がった薄い雲として観測される。ダストによって吸収された光（特に紫外線や可視光）は，ダストを暖め，遠赤外線として再放射され，最終的に赤外線シラス (遠赤外線を放射する希薄な雲）として観測される。写真に星（黒い点）として写っているのはダストによる散乱吸収を免れた光で，星の表面から観測者まで進路を変えることなく直接到達したものである。これを直接光と呼ぼう。以下の設問において，直接光，散乱光，遠赤外線放射の関係を考察しよう。ただし，数値は有効数字一桁で答えてよい。

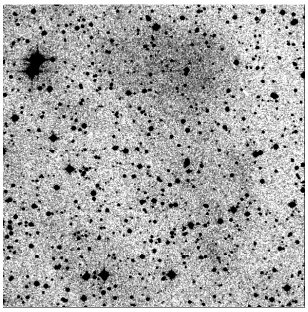

図 1

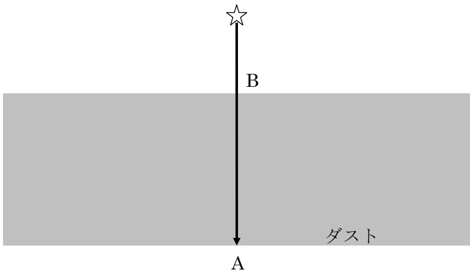

図 2

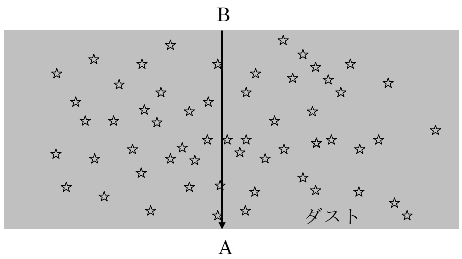

図 3

1. 図 2 の場合を考える。星と観測者 A の間にダストの雲があり，星の光を散乱吸収している。ダストは雲の中では一様に分布し，雲の外には存在しない。ここで，視線方向における雲の厚み（光の入射点 B と出射点 A の間の距離）は L，ダストの個数密度は n_d，ダストの吸収散乱断面積（散乱断面積と吸収断面積の和）は σ である。ダストはすべて同じ粒子であると仮定する。

   (a) ダストの雲の光学的厚み τ を，L，n_d，σ で表せ。

   (b) 入射点 B における星のフラックス（単位時間あたり単位面積あたりの放射エネルギー) を F_0 とする。雲を通り抜けた A 点での星のフラックスを τ と F_0 で表せ。ただし，L は星と観測者の間の距離に比べて十分小さいものとする。

2. 散乱光を評価するために，図 3 に示すような，星とダストが一様に混じり合って分布している平板を考える。視線方向における平板の厚み（AB 間の距離）は L で，星とダストは平板の内部にのみ分布していて，平板の外には存在しない。ダストの個数密度は n_d，吸収散乱断面積は σ である。l は視線方向に沿って点 B から点 A へ向かって測った距離であり，位置 l における点 B から点 A へ向かう単位立体角あたりの直接光の総和の放射強度を I_*，散乱光の放射強度を I_s とする。

   直接光の放射強度 I_* についての輸送方程式は $0 \leq l \leq L$ において，(1) 式で表されるとする。

$$\frac{dI_*}{dl} = -n_d \sigma I_* + S \tag{1}$$

   ここで S は，湧き口（星）から出てくる直接光の単位長さあたりの放射強度である。

(a) 点 A で観測される直接光の放射強度 I_*^A を $n_d, \sigma, L,$ および S で表せ。ただし，S は定数であり，点 B における直接光の放射強度 I_*^B は 0 である。

(b) $n_d = 0$ のとき $I_*^A = I_0$ であるとして，I_*^A を τ と I_0 で表せ。。

散乱の角度依存性と放射強度がいずれも等方的であると仮定し，散乱光の放射強度 I_s についての輸送方程式は，$0 \leq l \leq L$ において (2) 式で表されるものとする。

$$\frac{dI_s}{dl} = -n_d\sigma I_s + n_d\gamma\sigma(I_* + I_s) \tag{2}$$

ここで，γ はアルベド（散乱効率）と呼ばれる量で，散乱断面積と吸収断面積はそれぞれ $\gamma\sigma$ および $(1-\gamma)\sigma$ と表される。

(c) 式 (2) の右辺第 2 項が表す物理過程を説明せよ。

(d) 点 A で観測される散乱光の放射強度 I_s^A を，$n_d, \sigma, L, S,$ および γ で表せ。ただし，点 B における散乱光の放射強度 I_s^B は 0 である。

(e) I_s^A を $\tau, I_0,$ および γ で表せ。

(f) $\tau = 1,$ かつ $\gamma = 0.8$ のとき，$I_s^A/(I_*^A + I_s^A)$ を求めよ。ただし，$e^{-1} = 0.37, e^{-0.2} = 0.82$ としてよい。

3. ダストの温度 T_d は，吸収される紫外線および可視光線と放射される遠赤外線のバランスで決まり，(3) 式で表される。

$$\int_0^\infty (1-\gamma)\sigma(I_* + I_s)d\lambda = \int_0^\infty (1-\gamma)\sigma B(\lambda, T_d)d\lambda \tag{3}$$

ここで，$B(\lambda, T) = 2hc^2\lambda^{-5}/(e^{hc/\lambda kT} - 1)$ はプランク関数，$h, c,$ および k はそれぞれプランク定数，光速，ボルツマン定数である。吸収断面積は波長 λ に依存し，$(1-\gamma)\sigma \propto \lambda^{-1.2}$ であるものとする。また，ここでは $I_* + I_s = 10^{-14}B(\lambda, T_r = 10000K)$ が平板内のあらゆる場所で成り立っているものと仮定する。このとき，ダストの温度 T_d を求めよ。ただし，$10^{0.3} = 2.0$ としてよい。