平成 21 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専　門　科　目

平成 20 年 8 月 26 日（火）　　13 時 00 分－ 17 時 00 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で 10 ページである.
3. 答案用紙は, 各問につき 1 枚, 合計 4 枚配布してある．確実に配布されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 2 問, 物理学 2 問, 天文学 2 問の計 6 問ある．このうちから, 数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 題を含む 4 題を選んで解答せよ.
5. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せ. 問題番号は, 数学 1, 物理学 2, 天文学 1 などのように, 科目と番号で記入せよ.
6. 解答は, 各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ．必要なら裏ページを使用してもよい.
7. 解答出来ない場合でも, 4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出せよ.
8. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと.
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.

（草稿に使ってもよい．ただし，切り離さないで用いよ.）

[数学 1]

以下の問 1–3 に答えよ.

問 1. 自然対数の底 e を

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$$

と定義する. ただし n は正の整数とする. このとき, 実数 x についての関数 e^x について次の問いに答えよ.

(a) この定義を用いて e^x の微分が $\frac{de^x}{dx} = e^x$ となることを示せ.

(b) $x = 0$ の周りに e^x を Taylor 展開せよ.

問 2. 変数が虚数の場合を考える.

(a) e^{ix} を三角関数 $\sin x$, $\cos x$ を用いて表せ. ただし, x は実数, i は虚数単位とする.

(b) θ を実数として, $\sin 5\theta$ と $\cos 5\theta$ を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表せ.

(c) i^i の実部と虚部を求めよ.

問 3. n 次 (n は自然数) の正方行列 X に対して e^X を以下の様に定義する.

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$$

n 次の正方行列 X, Y, A に対して, 次の問いに答えよ.

(a) Y の行列式は 0 でないとすると

$$e^{YXY^{-1}} = Ye^XY^{-1}$$

となることを示せ.

(b) 実変数 t に依存しない行列を A とし, n 次の複素数ベクトルを $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ とする. このとき, 微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{1}$$

の解を A と $t = 0$ での ベクトル $\mathbf{x}(0)$ を用いて求めよ.

(c) (b) で, 行列 A が相異なる固有値 λ_i ($i = 1, 2, 3, \cdots, n$) と, それに対応する固有ベクトル $\mathbf{p}_i$ を持つとする. このとき, 微分方程式 (1) の解 $\mathbf{x}(t)$ を固有値と固有ベクトルと $\mathbf{x}(0)$ を用いて求めよ.

[数学 2]

独立変数 を t, 従属変数を x とする次の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

の初期値問題の数値解法について, 以下の問 1–3 に答えよ. $f(x)$ は無限回微分可能とする.

問 1. 以下は前進オイラー法と呼ばれる公式である.

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t f(x_t)$$

ここで, x_t は時刻 t における数値解の値をしめす. Δt は時間刻みである. 数値解の局所誤差を, $x_{t+\Delta t}$ と時刻 t で x_t から出発した真の解の時刻 $t+\Delta t$ での値との差と定義する.

この公式の局所誤差を Δt のベキ乗で展開したときの最低次の項を, f とその x による導関数の $x = x_t$ での値を使って表せ.

問 2. 以下は, ルンゲ・クッタ公式の一つである.

$$\begin{aligned} k &= f(x_t) \\ x_{t+\Delta t} &= x_t + \frac{1}{2}\Delta t[f(x_t + k\Delta t) + k] \end{aligned}$$

問 1 と同様にこの公式の局所誤差の最低次の項を求めよ.

問 3. 台形公式とは, 以下の形をした数値積分公式である.

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \frac{1}{2}\Delta t[f(x_{t+\Delta t}) + f(x_t)]$$

これについて, 同様に局所誤差の最低次の項を求めよ.

[物理学 1]

質量 M を持った恒星 (位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$) の周りを質量 m(位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$) を持った惑星が公転している．互いの間には重力のみが働き, 外力は存在しないと仮定する．万有引力定数を G とする．以下の問いに答えよ. 四角い枠で示された部分については, 枠の中に入る数式または数を答えよ.

問 1. これら二つの天体の運動は, 重心の等速運動と, 換算質量 $\mu \equiv mM/(m+M)$ を持った仮想的な惑星の恒星に対する相対運動に分解できることを示せ.

問 2. 惑星の質量 m が恒星の質量 M に比べてはるかに小さいときは, 重心は $\boldsymbol{r}_1$ の近くにあり, 換算質量は m に近いことを示せ.

このように $M+m \approx M$, $\mu \approx m$ と近似できる場合について, 恒星に対する惑星の相対運動を考えよう. 以下では, m は換算質量を表し, 恒星に対する惑星の相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \equiv \boldsymbol{r}$ と定義する. 動径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ とそれと直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ を基底とする極座標を考える. 惑星の速度ベクトルは $d\boldsymbol{r}/dt = d(r\boldsymbol{e}_r)/dt = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ で表される.

問 3. 惑星の角運動量を h とすると $h = \boxed{\text{3-1}}$ と書ける．惑星の恒星に対する位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が単位時間に掃く面積を面積速度と呼ぶが, 面積速度を惑星の角運動量の大きさ h と質量 m で表すと, $\boxed{\text{3-2}}$ となる．加速度ベクトルは, $d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = \boxed{\text{3-3}}\ \boldsymbol{e}_r + \boxed{\text{3-4}}\ \boldsymbol{e}_\theta$ となる．よって, 動径方向とそれに直交する方向の成分についての運動方程式は, それぞれ,

$$m\boxed{\text{3-3}} = \boxed{\text{3-5}} \tag{1}$$

$$m\boxed{\text{3-4}} = \boxed{\text{3-6}} \tag{2}$$

となる.

問 4. (2) を積分し, 面積速度と角運動量 h が一定になること（ケプラーの第 2 法則）を示せ.

問 5. 角運動量 h が一定である事を用いて, (1) からエネルギー保存則を導くと,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \boxed{\text{5-1}} - \frac{GMm}{r} = E \tag{3}$$

と書ける (5-1 は, h, m, r を使って表すこと). ただし, 全エネルギーを E とした.

問 6. ここで, 惑星が描く軌道が, 恒星をひとつの焦点とする楕円になること (ケプラーの第 1 法則) を導こう．角運動量が一定であることを用いて, (3) の第一項の時間による微分を角度 θ による微分に変換すると,

$$\boxed{\text{6-1}} + \boxed{\text{5-1}} - \frac{GMm}{r} = E. \tag{4}$$

この微分方程式は, r と θ の関係を与える．よって, r を θ について解くことによって, 惑星の軌道が得られる.

ここで, $1/r = u$ と変数を変換すると, u と θ の間の微分方程式を得ることができる．これは, 以下のように整理できる.

$$\pm\frac{du}{\sqrt{\boxed{\text{6-2}} - (u - \boxed{\text{6-3}})^2}} = d\theta \tag{5}$$

これを積分すると,

$$\pm\cos^{-1}\left(\frac{u-\boxed{\text{6-3}}}{\sqrt{\boxed{\text{6-2}}}}\right)=\theta \tag{6}$$

が得られる．ただし, 積分定数がゼロになるように角度の基準をとった．r について整理すると, ひとつの解として

$$r=\frac{\boxed{\text{6-4}}}{1+\boxed{\text{6-5}}\cos\theta} \tag{7}$$

が得られる．一般に, 平面上のある一点（焦点と呼ぶ）とそれを通る基準線を考え, その点からの距離を r, 基準線からの角度を θ とし, e, ℓ を定数とし,

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta}\quad(0\le e<1) \tag{8}$$

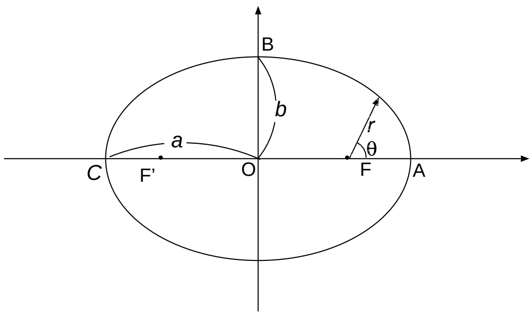
を満たす点をつなげると, それは楕円になる．ここで, e は離心率, l は半直弦と呼ばれる．$e=0$ が円に対応し, e が 1 に近づくほど, 扁平した楕円になる．惑星の描く軌道 (7) は, $l=\boxed{\text{6-4}}$, $e=\boxed{\text{6-5}}$ とすると, 楕円の式 (8) に他ならないことがわかる．

問 7. 次に,「惑星の公転周期の二乗が軌道長半径の三乗に比例する」というケプラーの第 3 法則が成立することを導こう．

その準備として, 楕円の性質について復習する．下図のように長半径 a, 短半径 b の楕円を考える．焦点 F を原点とした極座標をとると, この楕円は式 (8) で表される．また, 楕円の性質として,「二つの焦点 F, F' からの距離の和が一定」ということが挙げられる．下図の楕円上の点 A または C を考えると, その距離の和が $2a$ であることがただちにわかるだろう．一方，式 (8) を使って, FA, F'A という長さを l と e で表すこともできる．これから a,l,e の間の関係式が得られ, それは

$$a=\boxed{\text{7-1}} \tag{9}$$

となる．よって, 原点 O から焦点 F までの距離 OF を a と e を使って表すと $\boxed{\text{7-2}}$ となる．



上図の点 B に注目する．BF+BF'=$2a$ だから, $2\sqrt{b^2+\boxed{\text{7-2}}^2}=2a$ である．式 (9) を用いて e を消去し, b を a,l で表すことができる．

$$b=\boxed{\text{7-3}} \tag{10}$$

さて, 楕円の面積は πab だから公転周期を T として, 面積速度は

$$\boxed{\text{3-2}}=\frac{\pi ab}{T} \tag{11}$$

と書ける．(10) を用いて, さらに l が $\boxed{\text{6-4}}$ で表されることを用いると,

$$T=\boxed{\text{7-4}} \tag{12}$$

となり, ケプラーの第 3 法則が得られた．

[物理学 2]

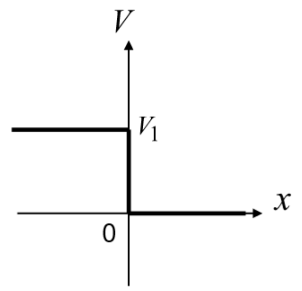
質量 m，エネルギー E の粒子の空間 1 次元での量子力学的振舞いを調べる．波動関数を $\Phi(x,t) = \Psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ とするとき，ポテンシャル $V(x)$ に対するシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + V(x)\Phi$$

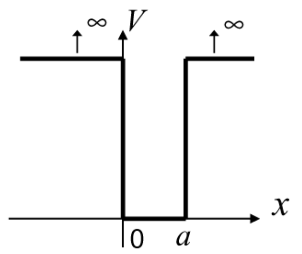
と書ける．ここでプランク定数を h とするとき，$\hbar = h/2\pi$ である．以下の問 1–4 に答えよ．

問 1. $\Psi(x)$ の満たす式を書け．

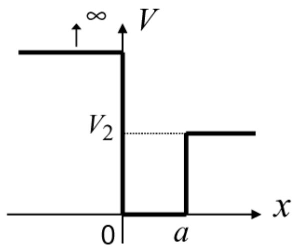
問 2. ポテンシャル V が $x \leq 0$ で $V = V_1$(一定)，$x > 0$ で $V = 0$ のとき，Ψ の $x = 0$ での値を $V_1 \to \infty$ の極限で求めよ．



問 3. ポテンシャルが $x \leq 0$ と $x \geq a$ で $V = \infty$, $0 < x < a$ で $V = 0$ であるとき，粒子のエネルギー固有値と規格化した波動関数を求めよ．



問 4. ポテンシャルが $x \leq 0$ で $V = \infty$, $0 < x < a$ で $V = 0$, $x \geq a$ で $V = V_2$（一定）であるとき，束縛された粒子のエネルギー固有値 E（$E < V_2$）が満たす式を a と V_2 を用いて表せ．また $V_2 \to \infty$ のときエネルギー固有値が問 3 で求めた答と一致することを示せ．



[天文学 1]

星（恒星）からの輻射による星周囲の水素ガスの電離を考える. 以下の問 1–3 に答えよ. なお計算で必要ならば, 太陽の諸定数（質量, 半径, 有効温度）

$M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg, $R_\odot = 7 \times 10^8$ m, $T_\odot = 6 \times 10^3$ K,

および, 物理定数（光速, プランク定数, ボルツマン定数）

$c = 3.0 \times 10^8$ m s^{-1}, $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s, $k = 1.4 \times 10^{-23}$ J K^{-1},

を用いよ. また, ここで考えている水素ガスの個数密度は一定で

$N_{\rm H} = 10^2$ cm^{-3} $= 10^8$ m^{-3},

とする. さらに,

1 pc（パーセク） $= 3 \times 10^{16}$ m $= 2 \times 10^5$ AU（天文単位）,

である. なお, 計算結果は, 特に指定していない場合には, 有効数字 1 桁で答えよ.

問 1. 水素ガスの電離平衡は次の式で表せる.

$$N_{\rm H^0} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu}{h\nu} a_\nu({\rm H^0})\, d\nu = N_{\rm p} N_{\rm e} \alpha({\rm H^0})$$

ここで, $N_{\rm H^0}$, $N_{\rm p}$, $N_{\rm e}$ はそれぞれ, 中性水素, 陽子, 電子の個数密度, J_ν は 単位周波数あたりの輻射の平均強度, $a_\nu({\rm H^0})$ は 電離断面積, $\alpha({\rm H^0})$ は 再結合係数である.

(a) 基底状態にある水素原子はある波長より短い紫外線（振動数 ν_0）によって電離される. その波長の光子のエネルギーを eV 単位で, 3 桁で答えよ.

(b) この式の左辺および右辺はそれぞれ何を表しているか答えよ.

(c) この電離領域はほぼ完全に電離しており, その外側の中性領域との境界層は電離領域のサイズに比べて大変薄い. この水素電離領域（H$^+$ 領域）の半径 $r_{\rm S}$ を何半径と呼ぶか答えよ.

問 2. 上で述べた J_ν であるが, 星の中心から距離 r の位置では, r^{-2} で希釈されることに加えて, r より内側の水素ガスの電離に使われることも考慮し, r について $r_{\rm S}$ まで積分すると, 電離平衡は次の式で表せる.

$$4\pi R_*^2 \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi F_\nu(R_*)}{h\nu}\, d\nu = \frac{4\pi}{3} r_{\rm S}^3 N_{\rm p} N_{\rm e} \alpha({\rm H^0})$$

また, 左辺 $= \int_{\nu_0}^{\infty} (L_\nu / h\nu)\, d\nu \equiv Q({\rm H^0})$ と書ける.
ここで, R_* は星の半径, $\pi F_\nu(R_*)$ は星表面での単位周波数あたりのフラックス, L_ν は単位周波数あたりの星の光度である.

(a) $Q({\rm H^0})$ は何を表しているか答えよ.

(b) O6 型主系列星（有効温度 $T_* = 4 \times 10^4$ K, $R_* = 10 R_\odot$）の場合, $Q({\rm H^0}) = 1.6 \times 10^{49}$ s^{-1} と計算される. この時の $r_{\rm S}$ を pc 単位で答えよ. ただし, $\alpha({\rm H^0}) = 4 \times 10^{-19}$ m^3 s^{-1} とする.

(c) 一方, O6 型星の光度を $L_\odot$（太陽光度）単位で表せ. ただし, 星の輻射は黒体輻射で表せるとする.

問 3. 以上で調べてきたように, O 型星のような高温度星は水素電離領域を作ることができる. では, 太陽（G2 型星）のような低温度星の周囲には水素電離領域が形成されるのであろうか. 計算して確かめてみよう. 太陽の輻射も黒体輻射とする.

(a) 太陽の $Q(\mathrm{H}^0)$ を計算してみよう.

$$Q(\mathrm{H}^0) = 4\pi R_\odot^2 \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi F_\nu(R_\odot)}{h\nu}\, d\nu = 4\pi R_\odot^2 \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{B_\nu(T_\odot)}{h\nu}\, d\nu$$

ここで, $B_\nu(T)$ はプランク関数であり, 次の式で表せる.

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

$h\nu/kT_\odot \gg 1$ $(\nu > \nu_0)$ であるので, $B_\nu(T)$ は Wien の法則で近似できる. 太陽の $Q(\mathrm{H}^0)$ を書き下せ.

(b) (a) で求めた式を使って $Q(\mathrm{H}^0)$ を計算して答えよ. 計算には以下の値を用いよ.

$$\frac{h}{kT_\odot} \sim 8 \times 10^{-15}\ \mathrm{s},\ x_0 \equiv \frac{h\nu_0}{kT_\odot} \sim 26,\ e^{-x_0} \sim 5 \times 10^{-12}$$

これは, O6 型星の $Q(\mathrm{H}^0)$ の何倍にあたるかを答えよ.

(c) 太陽の作る水素電離領域の半径 r_S を pc 単位および AU 単位で答えよ.

[天文学 2]

円軌道を運動する連星について以下の問 1–6 に答えよ.

質量が m_1 と m_2 の二星の間の距離を a, 軌道角速度を Ω で表す. 星の大きさは無視できるものとする. また, 万有引力定数は G, 光速度は c で表す.

問 1. ニュートン重力と遠心力が釣合うことから, $\Omega^2 a^3 =$ 一定 が成り立つことを示し, その一定値を求めよ.

問 2. 連星系の全エネルギー（運動エネルギー＋重力ポテンシャル）が

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a}$$

と書けることを示せ.

問 3. この連星が近似的に軌道を円形に保ちながら重力波を放出してエネルギーを失う場合を考える. 重力波放出によるエネルギー損失率が

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 a^5}$$

で与えられるとして, a の変化率 $\frac{da}{dt}$ が満たす式を求めよ.

問 4. 問 3 で求めた a についての微分方程式を解け. $t = t_0$ で $a = 0$ とする. その解を用いて $a = 100\,\mathrm{km}$, $1000\,\mathrm{km}$, $10000\,\mathrm{km}$ の各軌道から $a = 0$ に到るまでの時間を計算せよ. ただし, この計算では二星の質量がともに太陽質量に等しいとし, $G = 7 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$, 太陽質量 $= 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ を用い, 有効数字 1 桁の概算で良い.

問 5. 重力波放出に伴う軌道角速度 Ω の変化率 $\frac{d\Omega}{dt}$ が満たす式を求めよ.

問 6. 重力波エネルギー放出率 $-\frac{dE}{dt}$ が二星の質量や a によらず, 定数と Ω と $\frac{d\Omega}{dt}$ だけの関数として表すことができることを示せ.