

平成 22 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専 門 科 目

平成 21 年 8 月 25 日 ( 火 )      13 時 00 分 - 17 時 00 分

[注意事項]

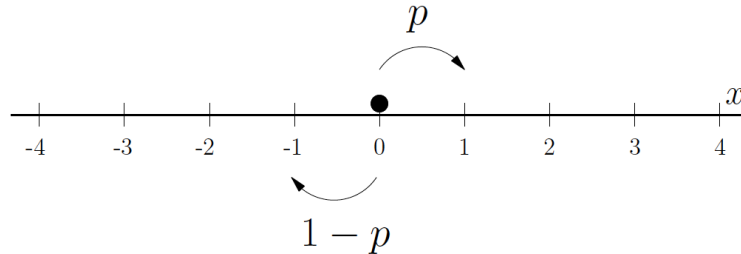
1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題冊子は、この表紙を含めて全部で 8 ページである。
3. 答案用紙は、各問につき 1 枚、合計 4 枚配布してある。確実に配布されていることを確かめよ。
4. 問題は数学 2 問、物理学 2 問、天文学 2 問の計 6 問ある。このうちから、数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 題を含む 4 題を選んで解答せよ。
5. 各答案用紙の所定欄に、問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ。問題番号は、数学 1、物理学 2、天文学 1 などのように、科目と番号で記入せよ。
6. 解答は、各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ。必要なら裏ページを使用しても良い。
7. 解答出来ない場合でも、4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出せよ。
8. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが、足りなくなった場合は手を挙げて請求すること。

(草稿に使っても良い。ただし、切り離さないで用いよ。)

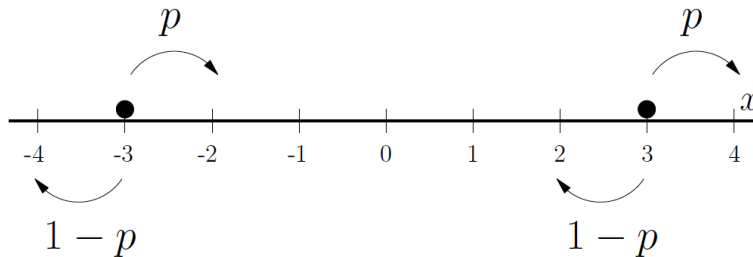
[数学 1]

粒子が  $x$  軸上の整数点を移動する。右側を正とし、1 ステップの間に粒子が  $+1$  移動する確率を  $p$ 、 $-1$  移動する確率を  $1-p$  とする。以下の問 1-3 に答えよ。

問 1.  $N$  ステップ後に、粒子が最初にあった点から  $X$  だけ離れた位置にある確率を求めよ。



問 2. 2 つの粒子が距離 6 だけ離れた位置にあるとき、 $N$  ステップ移動したときに 2 つの粒子が重なる確率を、 $N$  が 1 から 5 までの場合についてそれぞれ求めよ。



問 3. 2 つの粒子が距離 6 だけ離れた位置にあるとき、5 ステップ以内に 2 つの粒子が重なる場合について、初めて重なるまでのステップ数の平均を求めよ。また  $p = 0.5$  の場合、この値を計算せよ。

## [数学 2]

以下の問 1-3 に答えよ。

問 1.  $a$  と  $\omega$  が実数であり、且つ  $a > 0$  の場合、次の定積分を実行せよ。

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \omega x dx$$

問 2. 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = \sin x$$

問 3. 実関数  $f(t)$  のフーリエ変換を

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(2\pi i \omega t) dt$$

として定義する。以下の実関数  $f(t)$  のフーリエ変換を求めよ。ただし、 $a$  は正の実数とし、また、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

は既知として良い。

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -a/2 \text{ の場合}) \\ 1 & (-a/2 \leq t \leq a/2 \text{ の場合}) \\ 0 & (a/2 < t \text{ の場合}) \end{cases}$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -a \text{ の場合}) \\ a+t & (-a \leq t \leq 0 \text{ の場合}) \\ a-t & (0 \leq t \leq a \text{ の場合}) \\ 0 & (a < t \text{ の場合}) \end{cases}$$

(c)  $f(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/a^2)$

(d)  $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2 + a^2}$

[物理学 1]

以下の問 1-2 に答えよ。

問 1. 容積が  $V$  の立方体の容器の中にある、温度  $T$ 、圧力  $P$  の 1 モルの理想単原子気体を考える。

- (a) 理想気体の状態方程式を書け。ただし、アボガドロ数とボルツマン定数を、それぞれ、 $N_A$ 、 $k$  とする。
- (b) 気体が容器の壁に及ぼす圧力は、気体を構成する粒子が壁に衝突して跳ね返るときに壁に与える力積の時間平均であると考えられる。この立場から、理想単原子気体の原子の平均運動エネルギー  $u$  と圧力  $P$ 、体積  $V$  との関係式を導け。原子の質量を  $m$ 、平均速度を  $v$ 、容器の 1 辺の長さを  $L$  とせよ。
- (c) 上記設問 (a)(b) の結果を利用して、理想単原子気体の原子の平均運動エネルギー  $u$  を温度  $T$  で表せ。

問 2. 単原子気体 1 モルを構成する  $N$  個の原子を  $N_1, N_2, \dots, N_j$  の様に  $j$  個の組に分けて、それぞれを速度空間の体積  $g_1, g_2, \dots, g_j$  に分配する方法の数は、

$$W(N_1, N_2, \dots, N_j) = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_j!} g_1^{N_1} g_2^{N_2} \dots g_j^{N_j}$$

となる。

- (a)  $N_i \gg 1$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ) の場合、

$$N_i! = (2\pi N_i)^{1/2} N_i^{N_i} \exp(-N_i)$$

と近似出来ることを利用して、 $\ln W(N_1, N_2, \dots, N_j)$  を、 $N$  を含む項と  $N_i$  を含む項とに分けて書け。

- (b) 全粒子数一定と全エネルギー ( $E = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_j u_j$ ) 一定の下で  $\ln W$  が最大になる  $(N_1, N_2, \dots, N_j)$  の組がこの理想単原子気体の原子の速度分布を与える。未定乗数法により、この速度分布を求めたい。 $\delta N = 0$  についての未定乗数を  $-\alpha$  とし、 $\delta E = 0$  についての未定乗数を  $\beta$  とし、 $\ln W$  が最大となる  $N_i$  を  $g_i$ 、 $u_i$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  で表せ。
- (c)  $N_i$  の組の原子 1 個のエネルギー  $u_i$  は、その速度成分  $(v_x, v_y, v_z)_i$  により  $u_i = (m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)_i$  で与えられ、また、速度空間の体積は、 $g_i = (dv_x dv_y dv_z)_i$  である。 $j \rightarrow \infty$  の極限を考えて、この理想単原子気体の全原子の平均エネルギーを  $\beta$  で表せ。 $\lambda$  を正の実数とする場合について成り立つ以下の積分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\pi/\lambda}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\pi/(4\lambda^3)}$$

を使って良い。

- (d) 問 1(c) の結果を利用して、 $\beta$  を温度  $T$  で表せ。

[物理学 2]

図1のような配置で光干渉実験を行う。この配置を上から見たものが図2である。単スリット  $S$  と複スリット  $S_1$  及び  $S_2$  の中心点  $O$  との間の距離を  $L_0$ 、複スリットとスクリーンとの距離を  $L_1$  とする。複スリット  $S_1$  と  $S_2$  は互いに平行でその間隔は  $2a$  であり、また単スリット  $S$  にも平行である。また、複スリットの中心は光源と単スリットを結ぶ線上にあり、複スリット及びスクリーンは、その線に垂直に置かれている。このときにスクリーン上にできる干渉縞を、図2の様に  $O'$  を原点とした  $x$  座標を用いて表すものとする。

以下の問 1-3 に答えよ。

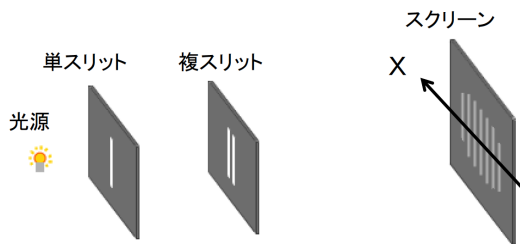


図 1: 光干渉実験の配置図。

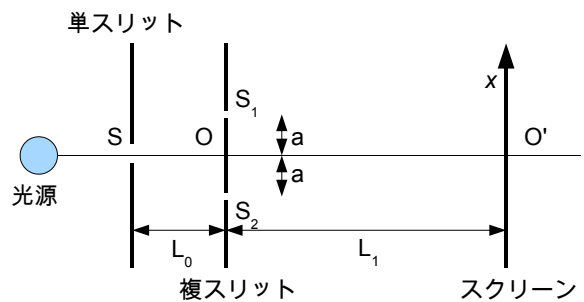


図 2: 図 1 を上から見た模式図。

- 問 1. 光源が単色波を出しており、単スリット上でのその強度が  $I(t) = A \exp(i\omega_0 t)$  と表される場合、スクリーンの  $x$  軸上での干渉縞の強度分布  $P_1(x)$  を求めよ。ただし、 $x$  の範囲は  $x \ll L_1$  であるとする。また、スリット  $S$ 、 $S_1$ 、 $S_2$  の幅は無視出来るものとする。
- 問 2. 光源が単色波ではなく、単スリット上でのその強度が  $I(t) = A \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \exp(i\omega t) d\omega$  と表される光を出している場合、スクリーンの  $x$  軸上での干渉縞の強度分布  $P_2(x)$  を求めよ。ただし、 $\Delta\omega \ll \omega_0$  とし、 $x$  の範囲は  $x \ll L_1$  であるとする。また、スリット  $S$ 、 $S_1$ 、 $S_2$  の幅は無視出来るものとする。
- 問 3. 光源が単色波を出しており、単スリット上でのその強度が  $I(t) = A \exp(i\omega_0 t)$  と表され、スリット  $S$  の幅は無視出来るほど小さいが、 $S_1$  及び  $S_2$  はそれぞれ  $\Delta a$  の幅をもつ場合、スクリーンの  $x$  軸上での干渉縞の強度分布  $P_3(x)$  を求めよ。ただし、 $\Delta a \ll a$  とし、且つ、 $\Delta a$  の幅は回折波が球面波近似出来る程度に狭いとものとする。また、 $x$  の範囲は  $x \ll L_1$  であるとする。

## [天文学 1]

或る恒星 A を光学干渉計と電波干渉計で観測している。電波干渉計の観測により、恒星 A に付随した一酸化ケイ素 (SiO) のレーザー輝線 (静止系での周波数  $f = 43 \text{ GHz}$ ) を発する点状構造 (レーザースポット) が多数発見された。その平均位置を 10 年間モニターすると図 1 の様になった。また太陽を基準とした系でのレーザー輝線の周波数の平均値は、上記の静止系での周波数から  $\Delta f = 9.0 \text{ MHz}$  だけ赤方偏移していたが、観測期間中で有為な変動は無かった。

以下の問 1-5 に答えよ。ただし、以下の計算では、光速  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 、1 pc (パーセク)  $= 3.1 \times 10^{16} \text{ m}$ 、1 AU (天文単位)  $= 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$  とせよ。

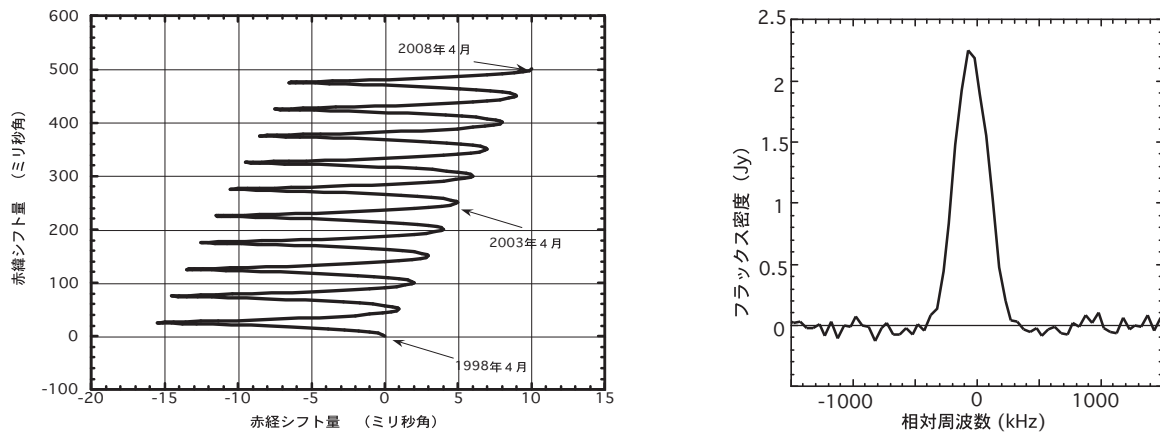


図 1: 恒星 A に付随した多数の一酸化ケイ素 (SiO) 図 2: 恒星 A に付随した或る 1 つの一酸化ケイ素レーザースポットの平均位置の 10 年間の変化。 (SiO) レーザースポットのスペクトル。

- 問 1. 恒星 A の視線速度 (空間速度の視線方向成分)  $v_{\parallel}$  を求めよ。
- 問 2. (a) 図 1 から恒星 A までの距離  $d$  を求めることができることを説明し、その値を求めよ。  
 (b) 図 1 から恒星 A の空間速度の視線に垂直な成分  $v_{\perp}$  を求めよ。
- 問 3. 恒星 A と太陽の間の距離は相対運動によって時間と共に変わる。その距離が最短になるのは何年前あるいは何年後か、またその最短距離  $d_{\min}$  は何パーセクか。ただし、現在の相対運動の状態は過去未来で変化しないものと仮定せよ。
- 問 4. 恒星 A に付随した或る 1 つのレーザースポットのスペクトルは図 2 の様であった。このレーザー輝線が全方向に等方的に電波を放射していると仮定したとき、このレーザースポットの輝線の放射光度を、図 2 のスペクトルから見積もって求めよ。ただし、図中の  $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$  とする。
- 問 5. 光学干渉計の観測から、恒星 A の視直径  $\theta$  は  $0.050''$  であると判った。恒星 A の実半径  $R$  の求め方を記述し、その値を求めよ。

## [天文学 2]

星の周りに星周層 (stellar envelope) が形成されているとする。星周層の温度は低いので星周層からの連続光は無視出来るものとする。観測者から見て星の前面に位置する星周層の領域 A では、特定の波長  $\lambda_0$  の星からの光を吸収するので、そこでは吸収線が形成される。一方、星の前面後面以外の星周層の領域 E では、同じ波長  $\lambda_0$  の星からの光を共鳴散乱するので、輝線が形成される。

星周層のガスが運動していると、星周層からの光の波長はドップラーシフトを受けるので、上記吸収線及び輝線のスペクトル線の輪郭は、星周層ガスの視線速度  $v$  の分布に従って、形を変える。星周層が中心からの距離  $r$  に比例して、速度  $V = ar$  ( $a$  は正の定数) で球対称に膨張しているとする場合について、スペクトル線の輪郭がどうなるかを考察しよう。簡単化のために、図 1 に示した様に、星周層は、内径を星の表面  $R_*$ 、外径を  $R_E$  とする球殻とし、内部の密度は一様で、その密度を  $\rho$  と記すことにする。また、座標系として、図 1 の様に、星の中心を原点とし、観測者の方向を  $y$  軸とする直交座標系をとることにする。以下の問 1-4 に答えよ。

問 1. 星周層内の点  $(x, y, z)$  にあるガスの視線速度  $v$  を  $(x, y, z)$  を用いて表せ。ただし、視線速度  $v$  は、観測者から遠ざかる場合を正、近づく場合を負とする。

問 2. 領域 E 内の視線速度  $v$  と  $v + dv$  に入る領域の体積を  $I_1(v)dv$  とする。  $I_1(v)$  を求めよ。

問 3. 領域 A 内の視線速度  $v$  と  $v + dv$  に入る領域の体積を  $I_2(v)dv$  とする。  $I_2(v)$  を求めよ。

問 4. 星は観測者から光度一様な円盤として見えるものとする。また、視線速度  $v$  に対する光度分布  $F(v)$  は、

$$F(v) = F_s(1 - \rho I_2(v)) + \rho I_1(v)$$

で与えられるものとする。ただし、 $F_s$  は星からの連続光の光度を表す。星周層が膨張していない場合のスペクトル線の輪郭を  $W(v)$  とすると、スペクトル線の輪郭は

$$S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} W(v - u)F(u)du$$

として、 $W$  と  $F$  の畳み込み (convolution) で与えられる。  $W(v) = \delta(v)$  (デルタ関数) として、 $S(v)$  を求め、  $-V_0 \leq v \leq V_0$  ( $V_0 = aR_E$ ) の範囲で図示せよ。

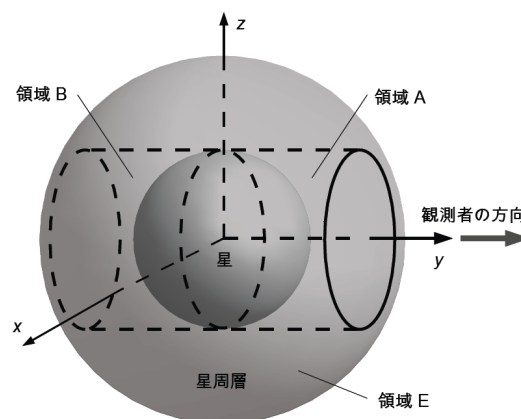


図 1: 星を囲む星周層の模式図。A: 観測者から見て星の前面に位置し、吸収線を形成する領域、B: 星の背後で観測者からは隠されている領域、E: 輝線を生じる、星の前面背後面以外の領域。