平成 23 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専　門　科　目

平成 22 年 8 月 24 日（火）　　13 時 00 分－ 17 時 00 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は，この表紙を含めて全部で 7 ページである.
3. 答案用紙は，各問につき 1 枚，合計 4 枚配布してある．確実に配布されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 2 問，物理学 2 問，天文学 2 問の計 6 問ある．このうちから，数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 題を含む 4 題を選んで解答せよ.
5. 各答案用紙の所定欄に，問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ．問題番号は，数学 1，物理学 2，天文学 1 などのように，科目と番号で記入せよ.
6. 解答は，各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ．必要なら裏ページを使用しても良い.
7. 解答出来ない場合でも，4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出せよ.
8. 答案用紙を絶対に草稿用紙として使用しないこと.
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが，足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.

[数学 1]

正の実数 p に対して，$\Gamma(p) \equiv \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ を定義する．また，n は自然数をあらわすとする．以下の問 1–5 に答えよ．

問 1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ となることを証明せよ．

問 2.
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$$
となることを導出した上で，次式が成り立つことを示せ．
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

問 3. 問 2 の結果を用いて，$\Gamma(\frac{1}{2})$ を求めよ．

問 4. $\Gamma(n) = (n-1)!$ となることを示せ．

問 5.
$$e^{-x} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
であることを用いて，
$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{p(p+1)(p+2)(p+3)\cdots(p+n)}n^p$$
となることを証明せよ．

[数学 2]

$u(x,t)$ に対する放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

(但し，D は正の定数，$0 \le x \le 1, \quad 0 \le t$) を，境界条件

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

と初期条件

$$u(x,0) = u_0(x)$$

の下で解くことを考える．以下の問 1–4 に答えよ．

問 1. $u(x,t) = A(x)B(t)$ と置き，偏微分方程式 (1) から A, B それぞれについての線形常微分方程式を導け.

問 2. 問 1 で導いた 2 つの常微分方程式から得られる偏微分方程式 (1) の解で，境界条件を満たすものを全て求めよ.

問 3. $u_0(x)$ が

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\{E_k \sin(k\pi x) + F_k \cos(k\pi x)\}$$

で与えられる時に， $u(x,t)$ を求めよ．ただし，E_k, F_k は定数とする．

問 4. 問 3 の結果を用いて，$u_0(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$ の時に $u(x,t)$ を求めよ.

[物理学 1]

スピン 1/2 で質量 m のフェルミ粒子からなる完全縮退した気体を考える．N 個の粒子が体積 V 中で熱力学平衡状態にある．以下の問 1–5 に答えよ．

問 1. このような粒子が持つ最大の運動量を p_{F} とすると

$$p_{\mathrm{F}} = \frac{h}{2}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}$$

が成り立つことを示せ．ただし，h は Planck 定数である．

問 2. 問 1 の p_{F} に対応するエネルギー ϵ_{F} は

$$\epsilon_{\mathrm{F}} = \sqrt{m^2c^4 + p_{\mathrm{F}}^2c^2}$$

と表される．ただし，c は光速である．このような粒子が非相対論的な場合には，運動エネルギーにあたる $\epsilon_{\mathrm{F}} - mc^2$ は N, V にどの様に依存するか．また，超相対論的な場合，ϵ_{F} は N, V を用いて近似的にどう表されるか．それぞれ答えよ．

問 3. 非相対論的なフェルミ粒子からなる気体の圧力は密度の何乗に比例するか．また超相対論的なフェルミ粒子気体の圧力は密度の何乗に比例するか．それぞれ答えよ．

問 4. 完全縮退した気体の温度を上げたとき，縮退が解け始める温度 T_{F} (縮退温度) は $kT_{\mathrm{F}} = \epsilon_{\mathrm{F}} - mc^2$ で与えられる．ただし，k はボルツマン定数である．縮退した中性子だけからなる気体と縮退した電子だけからなる気体があり，温度を上げていくと，どちらの気体も同じ温度で縮退が解け始めた．このときの中性子の数密度と電子の数密度の比を求めよ．ただし，中性子の質量と電子の質量の比は 1.6×10^3 とする．

問 5. 電子と陽子からなる中性プラズマを考える．電子の平均運動エネルギーが電子と陽子の間のクーロン相互作用によるエネルギーよりはるかに大きいとき，気体は理想気体に近づく．この条件を，非相対論的に完全縮退した電子について式で表せ．また，理想気体に近づくのは密度が増える場合か減る場合か，理由を示し答えよ．ただし，温度は一定とし，電気素量を e ，数密度と温度をそれぞれ n と T とせよ．

[物理学 2]

可視光領域で天体の観測にも使用されるガラス製のレンズには，波長によって屈折率が異なるという性質があり，いわゆる色収差の原因となる．このようなガラスの性質について古典的モデルから考察してみよう．ここでは簡単のため，可視光領域で透明で等方的なガラスを扱う．また，ガラス中では，電子はそれぞれの中立点のまわりの変位 $\mathbf{x}$ に比例した復元力を受け，角振動数 ω_0 の調和振動子としてふるまうという簡易化したモデルを考える．以下に真空中の Maxwell 方程式 (SI 単位系) を示す．ここで $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ρ, $\mathbf{j}$, ε_0, μ_0 は，それぞれ電場，磁束密度，電荷密度，電流密度，真空中の誘電率，真空中の透磁率である．

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

以下の問 1–5 に答えよ．

問 1. 上記の調和振動子モデルに対して，外部から電場 $\mathbf{E}$ が加えられたとき電子の運動を記述する運動方程式を求めよ．電子の質量を m_e，電子の電荷を $-e$ (e: 素電荷量) とする．

問 2. 外部より与えられた電場 $\mathbf{E}$ が角振動数 ω で時間 t とともに変動するとき ($\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E_0}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-i\omega t}$)，電子の変位量 $\mathbf{x}$ を問 1 で得た運動方程式より導け．Lorentz 力の磁場による項は無視してよいとする．

問 3. 問 2 で得られた電子の運動による電流密度 $\mathbf{j}$ を求めよ．ただし，外部より加えられた電場に応答する電子の数密度を n_e とする．

問 4. 誘電率 ε, 透磁率 μ をもったガラスの屈折率 n を，ε_0, ε, μ_0, μ で記述せよ．なお，真空中の光の位相速度を c，ガラス中の光の位相速度を v としたとき，屈折率は $n = c/v$ で定義される．

問 5. 問 3 で求めた電流密度 $\mathbf{j}$ を真空中のマックスウェル方程式に代入すると，ガラス中の電磁波の伝搬が記述できる．ガラスの屈折率を，角振動数 ω と，ω_0，ω_p の関数として示せ．ただしここで，ω_p はプラズマ角振動数 $\omega_p \equiv \sqrt{n_e e^2/m_e \varepsilon_0}$ である．

[天文学 1]

我々が観測する恒星の光は，中心部の核融合で発生した光子が内部の物質との相互作用を繰り返して表面に出てきたものである．この過程を簡単なモデルで考察してみよう．ここでは主系列星を取り上げる．完全電離した水素からなる一様球 (温度と密度が場所によらず一定) で主系列星を近似し，核融合は球の中心で起こるとする．また，物質との相互作用としては散乱のみを考える．以下の問 1–5 に答えよ．式を求める問ではその導出過程も記せ．

問 1. 微小な粒子で一様に満たされた空間での光子の運動を考えよう．光子は粒子により等方的に散乱 (入射方向によらず，あらゆる方向に等しい確率で散乱) されるとし，散乱の平均自由行程を l とする．ある光子の出発地点と N 回目に散乱される地点を結ぶベクトルを $\mathbf{r}_N$ と表すとき，$\mathbf{r}_N$ の大きさの期待値 $\sqrt{\langle \mathbf{r}_N^2 \rangle}$ を，N と l で表せ．ここで $\langle\rangle$ は平均を取る操作を意味する．どの連続した 2 つの散乱の間も光子は等しく l だけ進むと近似してよい．また，散乱による粒子の移動は無視してよい．

問 2. 主系列星の内部における光子の散乱を電子による等方的なトムソン散乱で近似しよう．

(a) 内部には電子と同数の陽子も存在するが，陽子による散乱は無視できる．これは電子と陽子のどのような違いによるためか，説明せよ．

(b) 中心で発生した光子が星の表面に達するまでの時間を $t_{\rm esc}$ とする．$t_{\rm esc}$ は，問 1 の $\sqrt{\langle \mathbf{r}_N^2 \rangle}$ が星の半径 R に等しくなる時間として求めることができる．$R = 4.0 \times 10^9$ m の星の $t_{\rm esc}$ を有効数字 1 桁で求めよ．ここで，この星の内部の平均自由行程は $l = 0.10$ m である．光速度 $c = 3.0 \times 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ を用いてよい．

問 3. 核融合で発生した光子は散乱を繰り返して恒星の内部を満たす．ここでは，内部を満たした光子を一様な温度の黒体輻射で近似することにしよう．半径 R の主系列星が温度 T の黒体輻射で満たされているとき，黒体輻射の全エネルギー $E_{\rm rad}$ を R と T を用いて表せ．必要に応じて定数を導入してよい．

問 4. 主系列星の光度 L のおおよその値は $t_{\rm esc}$ と $E_{\rm rad}$ を用いて表すことができる．その式を書き，どのような考えで式を導いたかを述べよ．

問 5. 主系列星において，幅広い質量範囲で ‘TR/M = 一定’ という関係が近似的に成り立つことが知られている．ここで M は主系列星の質量である．主系列星 A と B があり，A の光度は B の 2 倍であることがわかっている．A と B に上記の関係が厳密に成り立っていると仮定しよう．A の質量が B の何倍であるかを，問 4 までの結果を用いて推定せよ．

[天文学 2]

系外惑星の探査手段の一つである直接撮像とは，対象とする星（主星と呼ぼう）のコロナグラフなどを用いた撮像観測によって，主星近傍に暗い天体を探す手法である．主星のすぐ近くに非常に暗い天体が検出された場合に，その天体が惑星候補となるが，背景の遠方の星が偶然主星の近くに観測されている可能性もある．その可能性を判断する手がかりとして，固有運動が用いられる．以下では，仮想的な惑星系を考えて，その系がどのように観測されるか，また，観測結果からどのような惑星系であると推定されるかを考察しよう．以下の問 1–3 に答えよ．解答は有効数字 2 桁で示せ．定数や単位換算は以下の値を用いても良い．

- G(重力定数) $= 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}\,kg^{-1}}$
- $1\,\mathrm{M_\odot}$(太陽質量)$= 2.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- 1 AU(天文単位)$= 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
- 1 pc (パーセク) $= 3.1 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$
- 地球の平均軌道速度 $= 30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

問 1. 太陽から距離 10 pc 離れた位置にある星が，視線方向に垂直な方向に 20 km $\mathrm{s^{-1}}$ の相対速度で移動している場合，観測される固有運動の大きさを，年あたりの秒角 ($''\mathrm{yr}^{-1}$) の単位で求めよ．

問 2. 主星より十分に小さい質量の惑星をもつ惑星系を，その公転軌道面に対して垂直の方向から観測する場合を考える．主星の質量は $2\mathrm{M_\odot}$ で，主星までの距離は 10 pc とする．

(a) この惑星が軌道長半径が 10AU の円軌道にある時，軌道運動の速度を km $\mathrm{s^{-1}}$ 単位で求めよ．さらに，その軌道運動を天球上に投影した移動速度を，年あたりの秒角 ($''\mathrm{yr}^{-1}$) の単位で求めよ．

(b) この惑星の軌道周期を年の単位で求めよ．

問 3. 逆に，天球上の主星との相対運動から惑星の軌道を求めよう．同じく，中心星の質量は $2\mathrm{M_\odot}$ で，距離は 10pc とする．惑星候補天体が主星から $1''$ 離れた位置に発見された．その主星に対する相対運動は，惑星候補天体と主星を結ぶ直線に対して垂直な方向に $0.20''\mathrm{yr}^{-1}$ であった．この天体が惑星で，かつその公転軌道面が視線方向と垂直であると仮定した場合，その軌道運動について以下の問 (a)，(b) に答えよ．

(a) 推定される惑星軌道のおおまかな形状と主星および惑星の現在の位置を図示せよ．また，その推定の根拠を述べよ．

(b) この惑星軌道の軌道長半径を AU 単位で求めよ．