

平成 24 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専 門 科 目

平成 23 年 8 月 23 日 (火) 13 時 00 分 - 17 時 00 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題冊子は、この表紙を含めて全部で 9 ページである。
3. 答案用紙は、各問につき 1 枚、合計 4 枚配布してある。確実に配布されていることを確かめよ。
4. 問題は数学 2 問、物理学 2 問、天文学 2 問の計 6 問ある。このうちから、数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 題を含む 4 題を選んで解答せよ。
5. 各答案用紙の所定欄に、問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ。問題番号は、数学 1、物理学 2、天文学 1 などのように、科目と番号で記入せよ。
6. 解答は、各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ。必要なら裏ページを使用しても良い。
7. 解答出来ない場合でも、4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出せよ。
8. 答案用紙を絶対に草稿用紙として使用しないこと。
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが、足りなくなった場合は手を挙げて請求すること。

[数学 1]

以下の問 1-3 に答えよ .

問 1. 任意の実関数 $f(x)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

を満たす $\delta(x)$ をデルタ関数と定義する . デルタ関数が以下の性質を持つことを示せ .

$$(a) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

ただし , a は実定数 ($a \neq 0$) とする .

$$(b) \quad \delta(z - g(x)) = \sum_i \delta(x - x_i) \frac{1}{|g'(x_i)|}$$

ただし , z は実定数 , $g(x)$ は実関数 , $g'(x)$ は $g(x)$ の 1 次微分であり , x_i は $z = g(x)$ の実数解とする . ここで , x_i は必ず 1 つ以上存在するものとし , かつ $|g'(x_i)| \neq 0$ とする . なお , \sum_i はすべての実数解についての和を表す .

問 2. ある確率分布関数 P に従う 2 つの独立な確率変数 x, y があるとき , その積 $s = xy$ は以下の確率分布関数 $Q(s)$ に , また , 商 $t = x/y$ は以下の確率分布関数 $R(t)$ に従うことを示せ .

$$Q(s) = \int \frac{1}{|x|} P(x) P\left(\frac{s}{x}\right) dx$$

$$R(t) = \int |x| P(x) P(tx) dx$$

ここで , $P(x)$ は上式の被積分関数を発散させないものとする .

問 3. 正規分布

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (-\infty < x < \infty, \sigma > 0)$$

に従う 2 つの独立な確率変数 x, y の和 $x + y$ が従う確率分布関数と , 商 x/y が従う確率分布関数を求めよ . また , それぞれの分布を $P(x)$ と比較し , その違いを簡潔に述べよ .

[数学 2]

平面上の直交座標系 (xy 座標系) における曲線を表す関数について, 以下の設問 1-3 に答えよ.

問 1. 曲線上の任意の点の座標を (ξ, η) とする.

- (a) 点 (ξ, η) における接線の x 切片を, ξ, η 及び接線の傾き $d\eta/d\xi$ で表せ.
- (b) 接点 (ξ, η) と接線の x 切片との距離を, ξ, η 及び接線の傾き $d\eta/d\xi$ で表せ.

問 2. 曲線上の任意の点とその点における接線の x 切片との距離が 1 となるような曲線を考える.

- (a) そのような曲線を表す微分方程式を導け.
- (b) 微分方程式を解くために,

$$y(t) \equiv 1/\cosh t = \left[(e^t + e^{-t})/2 \right]^{-1} \quad (1)$$

で $y(t)$ を定義する.

- (1) dy/dt を $\cosh t$ と $\sinh t$ で表せ.
- (2) $\sqrt{1 - y^2}/y$ を $\sinh t$ で表せ.
- (3) $d \tanh t/dt$ を $\cosh t$ で表せ.
- (c) このような曲線のうち, 定点 $(0, 1)$ を通る曲線は,

$$x = t - \tanh t, \quad y = 1/\cosh t \quad (2)$$

と媒介変数 t を使って表せることを示せ.

問 3. 媒介変数を使って表した曲線上の任意の点 $(\xi(t), \eta(t))$ における法線を

$$y = \alpha(t)x + \beta(t) \quad (3)$$

とする.

- (a) $\alpha(t)$ 及び $\beta(t)$ を, ξ, η 及び接線の傾き $d\eta/d\xi$ で表せ.
- (b) (2) 式で表される曲線について, $\alpha(t)$ 及び $\beta(t)$ を媒介変数 t を使って表せ.
- (c) 媒介変数 t を変化させてできる法線群の包絡線を, $\alpha(t), \beta(t), d\alpha/dt$ 及び $d\beta/dt$ を使って媒介表示せよ.
- (d) (2) 式で表される曲線の法線群の包絡線を, 媒介変数 t を消去して, x の関数として明示せよ.

[物理学 1]

粒子の拡散現象を考察する．粒子の数密度に勾配があると，粒子は密度が低い方向に拡散し，数密度 $n(\mathbf{r}, t)$ と流速密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ の間には (1) 式で表されるフィックの法則が成り立つ．ここで \mathbf{j} , \mathbf{r} は 3 次元のベクトルで， D は粒子の拡散係数であり， $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ は微分演算子である．また，デルタ関数 $\delta(x - x_0)$ は，任意の関数 $f(x)$ に対して (2) 式で定義される超関数である．実数変数に対するガウス積分は (3) 式で与えられる．

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -D\nabla n(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k^2) dk = \pi^{1/2} \quad (3)$$

以下の問 1-5 に答えよ．

問 1. $n(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ の間に成り立つ連続の方程式とフィックの法則 (1) から， $n(\mathbf{r}, t)$ が従う拡散方程式を導け．

問 2. 一次元の場合に，初期条件を $n(x, 0)$ として，フーリエ変換の方法を用いて拡散方程式の解を積分形で表せ．また，初期条件が $n(x, 0) = \delta(x)$ である場合の解を求め， $t = \frac{1}{16D}$ および $\frac{1}{4D}$ の時の数密度分布 $n(x, t)$ を図示せよ．

問 3. 前問で，さらに x 方向に一定の速度 v の風が吹いているとした場合に拡散方程式を解き，時刻 $t(> 0)$ での数密度分布 $n(x, t)$ を図示せよ．

問 4. 次に，二次元の場合を考える． x 方向には一定の速度 v の風が吹いているが y 方向は無風であるとする．原点 $(x, y) = (0, 0)$ において時刻 $t = 0$ と $t = t_0(> 0)$ の 2 回にわたって同じ個数の粒子が注入される場合に，拡散方程式を解け．また，時刻 $t > t_0$ における数密度分布 $n(x, y, t)$ を，等高線として二次元 xy 平面上に図示せよ．

問 5. 問 3 で，粒子が平均寿命 τ で指数関数的に消滅する場合を考察する．拡散方程式はどのように書き表されるかを示し，その微分方程式を解け．

[物理学 2]

屈折現象における光の入射角と反射角の間にはスネルの法則が成り立つ．図 1 のように屈折率 n_a, n_b の領域が接する面に光が入射する場合，

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b \quad (1)$$

が成り立つ．ここで θ_a, θ_b はそれぞれ入射角，屈折角である．以下の問 1-3 に答えよ．

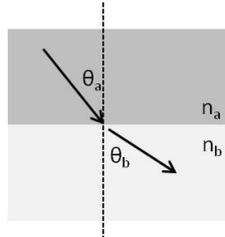


図 1: 光の屈折の図

問 1. $n_a > n_b$ とする．入射角がある値よりも大きくなると屈折が全く起きず，光は全て反射する．このような全反射が起きる最小の入射角を θ_c としたとき $\sin \theta_c$ を n_a, n_b を用いて表せ．

問 2. 屈折面での全反射を用いた例としては，光ファイバーがあげられる．これは中心に屈折率 n_1 のコアを持ち，周囲を $n_2 (< n_1)$ の物質で取り囲んだ構造をしている．今，ファイバー中心を通る断面が図 2 右のようになったファイバーを考える．ファイバーのコア半径 R およびファイバーの長さ L は，光の波長に比べて十分長いとし，簡単のためファイバー入射面の中心を通る光線だけを考える．光線はすべて yz 平面にあるとする．

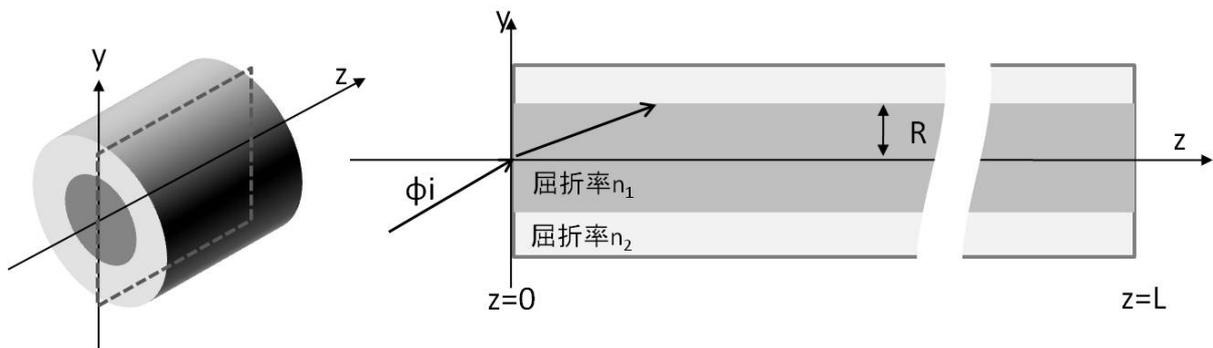


図 2: 屈折率が半径 R で不連続に変化するファイバー

(a) $z = 0$ にあるファイバー端面（入射端面）に光線が外側から入射角 ϕ_i で入射することを考える．光線が全反射を繰り返し，もう一方の端面（出射端面： $z = L$ ）まで届く入射角の最大値を ϕ_{ic} としたとき， $\sin \phi_{ic}$ を n_1, n_2 で示せ．なおファイバーの外での屈折率 n_0 は 1 とする．

- (b) このようなファイバーでは、入射端面から出射端面までの間の光路長が入射角 ϕ_i によって異なることが知られている。もっとも長い経路と最も短い経路での光路長の差 δ を L , n_1, n_2 を用いて示せ。

問3. 問2のファイバーの代わりに、中心部分の屈折率が半径方向に連続的に変化するようなファイバーを考える。中心からの半径 r での屈折率 $n(r)$ が

$$n(r) = n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 r^2} \quad (-R \leq r \leq R) \quad (2)$$

で記述されるとする。ここで α は正の定数であり、 $\alpha^2 r^2 \ll 1$ を満たすとする。また $r = R$ での屈折率は $n(R) = n_2$ であるとする。このファイバーの yz 面での断面図が図3右である。問2と同様、光線は yz 平面内にあり、ファイバー入射端面の中心を通る光線だけを考える。またファイバー内で光線が z 軸となす角度 ϕ は $\phi \ll 1$ を常に満たすとする。

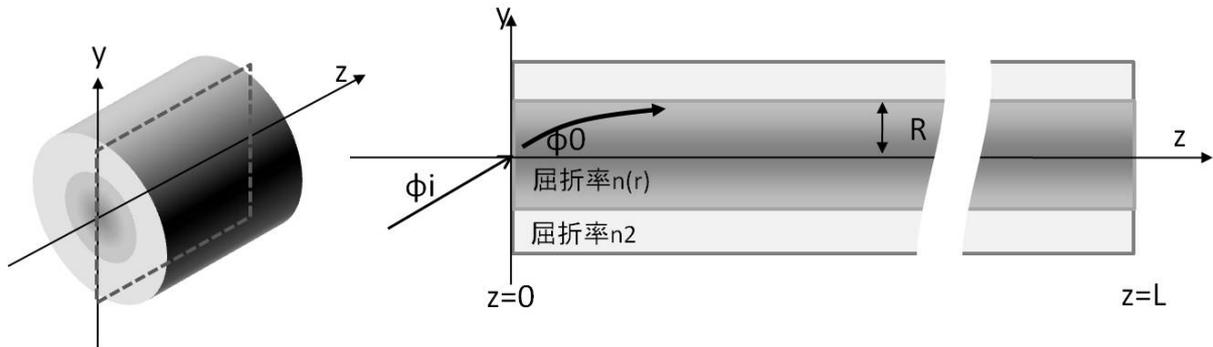


図3: 屈折率が連続的に変化するファイバー

- (a) ファイバー中での光線の軌跡 (y, z) について、

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\alpha^2 y \quad (3)$$

が成り立つことを示せ。

- (b) 入射端面 $z = 0$ において、ファイバー内で光線が z 軸となす角を ϕ_0 として、この光線の軌跡 y を z の関数として示せ。
- (c) 入射端面 $z = 0$ に外側から ϕ_i で入射する光線を考える。この光線が $-R \leq r \leq R$ の範囲に閉じ込められ、出射端面 $z = L$ まで届くような ϕ_i の最大値を ϕ_{ic} としたとき、 $\sin \phi_{ic}$ を求め、問2(a)の結果と比較せよ。ただしファイバーの外側の屈折率 n_0 は1であるとする。
- (d) このファイバーにおいて、入射角の違いによって生じる光路長差 δ を ϕ_0 の2次の項まで求めよ。

[天文学 1]

熱核融合反応によって輝いている進化途上の恒星に対し、進化終末期にあたる白色矮星、中性子星、ブラックホールをコンパクト天体と呼ぶ。白色矮星、中性子星は典型的に太陽質量 (M_{\odot}) 程度の質量を持つ。質量が $3M_{\odot}$ よりも大きなコンパクト天体はブラックホールと考えられている。これらのコンパクト天体に物質が落ち込み、重力エネルギーが解放されて X 線放射として観測される場合を考える。

ここでは中性子星および白色矮星の質量はどちらも $1M_{\odot}$ とし、それぞれの半径は 10 km, 5000 km とする。質量 M の天体に対し、そのシュワルツシルド半径は $2GM/c^2$ で定義される。 G は万有引力定数、 c は光速である。太陽のシュワルツシルド半径を $2GM_{\odot}/c^2 \approx 3$ km, 光速 $c \approx 3 \times 10^8$ m s $^{-1}$, ステファンボルツマン定数 $\sigma \approx 6 \times 10^{-8}$ J s $^{-1}$ m $^{-2}$ K $^{-4}$ とし、以下の問 1-2 に有効数字一桁で答えよ。

問 1. コンパクト天体に落ち込む物質が球対称に分布している場合を考える。

- (a) コンパクト天体の質量を M , 半径を r , 質量降着率を \dot{M} とすると、重力エネルギーの解放による光度 L を

$$L \approx \frac{GM\dot{M}}{r}$$

と見積もることができる。中性子星および白色矮星に質量降着率 $\dot{M} = 10^{15}$ kg s $^{-1}$ で物質が落ち込み、重力エネルギーを解放して光っているとき、上式を用いてそれぞれの光度を見積もれ。

- (b) 水素原子の質量を m_{H} とし、半径 r にある一つの水素原子が天体から受ける重力を r , G , M , m_{H} を用いて表せ。
- (c) 水素原子は原子中の電子のトムソン散乱 (断面積は σ_{T}) によって、光を遮り、圧力を受ける。天体が光度 L , 球対称で光っているとき、半径 r における一つの電子が光から受ける力 (= 一つの水素原子が光から受ける力) を、 L , σ_{T} , c , r を用いて表せ。
- (d) 球対称の場合、物質がコンパクト天体から受ける重力と光による圧力が釣り合う限界光度があり (エディントン限界, L_{Edd}), 天体はそれ以上明るくなることはできない。ここでは簡単のために、天体に落ち込む物質として水素だけを考える。上の (b) と (c) で求めた量を結びつけることにより、エディントン限界 L_{Edd} を導け。
- (e) $\kappa_{\text{T}} \equiv \sigma_{\text{T}}/m_{\text{H}}$ の値は 4×10^{-2} m 2 kg $^{-1}$ である。これを用いて、中性子星および白色矮星それぞれについて、エディントン限界 L_{Edd} の値を見積もり、両者の値を比較せよ。
- (f) 中性子星と白色矮星がそれぞれ質量降着率 $\dot{M} = 10^{15}$ kg s $^{-1}$ で重力エネルギーを解放して光っている場合、それらの光度とエディントン限界とを比較せよ。
- (g) エディントン限界で光っている天体が黒体放射をしている場合、その表面温度の値を質量と半径の関数として記述する式を導け。それを用いてエディントン限界で光っている中性子星と白色矮星の表面温度の値を、それぞれ見積もれ。

問 2. 中性子星やブラックホールが連星系を成しているとき、伴星から落ちていく物質が中性子星やブラックホールの周りに円盤 (降着円盤) を形成し、解放された重力エネルギーが熱エネルギーに変換され、X 線で観測される場合がある。ここでは単純に、幾何学的に薄い降着円盤が黒体放射をしている場合を考える。円盤のモデルを単純化して、降着円盤の内縁を r_{in} , そこにお

る温度を T_{in} , 円盤の温度分布は半径 r の関数として $T(r) \propto r^{-3/4}$ と仮定する . また , 円盤の外縁半径は十分に大きいものとする .

- (a) 降着円盤の輻射を半径方向に積分することによって , 円盤の光度 L_{disk} を , r_{in} , T_{in} , ステファンボルツマン定数 σ を用いて表せ (円盤の表と裏を考慮すべきことに注意) .
- (b) 一般相対性理論によると , 回転していない中性子星やブラックホールの周りを公転する物体の最小円軌道半径は , シュワルツシルド半径の三倍である . 円盤の内縁を最小円軌道半径と仮定することによって , 中心天体の質量 M を , 降着円盤の光度 L_{disk} と内縁温度 T_{in} で表す式を導け . この式から , ブラックホールの周りの降着円盤と中性子星の周りの降着円盤の光度 L_{disk} が等しい場合 , どちらの降着円盤の内縁温度の方が高いか , 述べよ .
- (c) 降着円盤を持つ二つの X 線天体があり , どちらの降着円盤も光度は $L_{\text{disk}} = 10^{31} \text{ J s}^{-1}$ であった . それぞれについて , $T_{\text{in}} = 6 \times 10^6 \text{ K}$, $T_{\text{in}} = 2 \times 10^7 \text{ K}$ を測定した . これから , それぞれの中心天体の質量を見積もれ . この場合 , どちらがブラックホールでどちらが中性子星と考えられるか ?

[天文学 2]

黒体からの輻射スペクトルについて調べよう．周波数 ν での温度 T の黒体輻射 $B_\nu(T)$ は，以下の (1) 式で与えられる．

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1)$$

ここで h はプランク定数， c は光速， k はボルツマン定数で，それぞれ $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s， $c = 3.0 \times 10^8$ m s $^{-1}$ ， $k = 1.4 \times 10^{-23}$ J K $^{-1}$ とする．また $B_\nu(T)$ の単位は W m $^{-2}$ Hz $^{-1}$ sr $^{-1}$ である．以下の問 1–3 に答えよ．

問 1. 温度 T の黒体からの輻射は，周波数 ν の関数としてどのような形（スペクトル）になるだろうか？ 次の問 (a)–(c) に答え，その形を求めよ．

- (a) $h\nu/kT \ll 1$ 及び $h\nu/kT \gg 1$ の 2 つの極限における (1) 式の近似式を求めよ．
- (b) (1) 式で与えられる $B_\nu(T)$ は温度 T を一定とした場合に，ある周波数 ν_{\max} において最大値を持つ． $B_\nu(T)$ が最大となる周波数 ν_{\max} と T の関係式を求めよ．一般に $e^{h\nu_{\max}/kT}$ は 1 より十分大きい．この場合に ν_{\max} を T の関数として表せ．
- (c) $T = 100$ K の場合に， $\nu = 2 \times 10^{10}$ ， 2×10^{13} Hz，及び，(b) で求めた $\nu = \nu_{\max}$ での $B_\nu(T)$ の値を有効数字 1 桁で求めよ．なお必要があれば $e^3 = 20$ ， $e^{10} = 2.2 \times 10^4$ を用いよ．
- (d) 上の結果を用いて， $T = 100$ K の場合の黒体輻射のスペクトルの形を図示せよ．

問 2. 下の表は，ある天体からのそれぞれの周波数におけるフラックス密度 F_ν を示している．この天体からの輻射は黒体輻射であるとして，以下の問 (a)–(c) に答えよ．なお $1\text{Jy} = 1 \times 10^{-26}$ W m $^{-2}$ Hz $^{-1}$ である．

ν (Hz)	2×10^{10}	8×10^{10}	2×10^{11}	6×10^{11}	1×10^{12}	2×10^{12}	3×10^{12}
F_ν (Jy)	31	450	2100	4700	2900	230	6.3

- (a) 問 1 での結果を参考にして，この天体の温度 T を推定せよ．
- (b) この天体を半径 R の球とし，距離 d から観測した場合のフラックス密度 F_ν を， $B_\nu(T)$ ， R ， d を用いて表せ．なお，天体と観測点の間でエネルギーの吸収や再放出はないものとする．天体表面の単位面積から輻射されるフラックス密度は $\pi B_\nu(T)$ で与えられる．
- (c) (a) 及び (b) の結果を用い， $R = 0.3$ pc と仮定して，この天体までの距離を有効数字一桁で推定せよ．なお 1pc は 3×10^{16} m とする．

問 3. $T \sim 10 - 20$ K で黒体輻射をする天体の観測を行いたい．どの波長帯で観測するのが適当であろうか．その波長帯と理由を述べよ．