平成 25 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専　門　科　目

平成 24 年 8 月 28 日（火）　　13 時 00 分－ 17 時 00 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は，この表紙を含めて全部で 8 ページである.
3. 答案用紙は，各問につき 1 枚，合計 4 枚配布してある，確実に配布されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 2 問，物理学 2 問，天文学 2 問の計 6 問ある．このうちから，数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 題を含む 4 題を選んで解答せよ.
5. 各答案用紙の所定欄に，問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ．問題番号は，数学 1，物理学 2，天文学 1 などのように，科目と番号で記入せよ.
6. 解答は，各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ．必要なら裏ページを使用しても良い.
7. 解答出来ない場合でも，4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出せよ.
8. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと.
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが，足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.

（草稿に使っても良い．ただし，切り離さないで用いよ.）

[数学 1]

以下の常微分方程式の一般解 $y = f(x)$ をそれぞれ求めよ.

1. $$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{-x}$$

2. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$$

3. $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 0$$

4. $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$$

[数学 2]

以下の問 1–3 に答えよ.

問 1. $(x,\, y)$ 平面上の任意の点を原点の周りに θ だけ反時計回りに回転させる 2 次正方行列 $R(\theta)$ について, 以下の問に答えよ.

(a) 行列 $R(\theta)$ の要素を求めよ.

(b) 行列 $R(\theta)$ を対角化する複素行列 S を求め, 対角化した行列 $S^{-1}R(\theta)S$ を求めよ. ただし, S^{-1} は S の逆行列である.

問 2. 3 次実正方行列 G と, その $(i,\, j)$ 要素 g_{ij} から作られる $(x,\, y,\, z)$ 空間上の 3 つのベクトル $\mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ g_{3j} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, 3$ が張る平行六面体 V について, 以下の問に答えよ.

(a) 平行六面体 V の体積 v をベクトル $\mathbf{g}_j$ を用いて表せ.

(b) 体積 v が行列 G の行列式の絶対値と等しいことを示せ.

(c) 3 つのベクトル $\mathbf{g}_j$ の長さがともに 2 であるとき, G の行列式の最大値と最小値を求めよ.

問 3. n 次 (n は 2 以上の整数) 実正方行列 A について, 以下の問に答えよ.

(a) 任意の n 次実ベクトル $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ を行列 A によって変換したところ, 変換前後の 2 つのベクトルの内積は等しかった. すなわち $(\mathbf{p},\, \mathbf{q}) = (A\mathbf{p},\, A\mathbf{q})$. このとき A が持つ性質を示せ.

(b) A の行列式の値を求めよ.

[物理学 1]

水平な面上を運動する質点 A と鉛直線上を運動する質点 B とが, 長さ ℓ の糸で, 面にある小さな穴を通して繋がれている. 糸のねじれやたわみはないものとし, 糸の重さは無視できるものとする. 質点 A, B の質量はそれぞれ m_{A}, m_{B} とし, 重力加速度を g とする. また, 摩擦は無視できるものとする. 質点 A と穴との距離を r として, 以下の問 1–3 に答えよ.

問 1. この系の運動方程式を導きたい.

(a) 質点 A の運動を, 穴を原点とする水平面上の極座標 (r, φ) を用いて表したい. 速度ベクトルの r-成分と φ-成分を, r, φ, 及びそれらの時間微分で表せ.

(b) 同じく, 加速度ベクトルの r-成分と φ-成分を, r, φ, 及びそれらの時間微分で表せ.

(c) 系の運動方程式を r に関する微分方程式として記せ.

問 2. (a) 両質点のエネルギーの総和が保存することを示せ.

(b) 上で求めたエネルギーのうち, dr/dt には依存しない項を有効ポテンシャル $U(r)$ と定義する. $dU/dr = 0$ となる平衡点 $r = r_0$ を求めよ.

問 3. 質点 A の運動が問 2 (b) の平衡点 (ただし $0 < r_0 < \ell$ とする) からわずかにずれた運動を考える.

(a) 質点 A の運動を表す微分方程式を, 平衡状態からの微小なずれ, $\xi \equiv (r - r_0)/r_0$, の 1 次の項までの近似で導け.

(b) この近似での平衡状態からのずれの運動は周期的変動であることを示し, その変動周期と平衡状態での等速円運動の周期との比を求めよ.

[物理学 2]

真空中を運動する電荷からの電磁波の放射について, 以下の問 1–3 に答えよ. 解答では MKSA 単位系を用いるものとし, 光速度を c, 電気素量を e ($e > 0$), 真空の誘電率を ε_0, 真空の透磁率を μ_0 とする. なお, 電磁場の性質を調べる上で基本となるマクスウェルの方程式は, 時刻 t, 位置 $\mathbf{r}$ での電場を $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, 磁場を $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, 電荷密度を $\rho(\mathbf{r},t)$, 電流密度を $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ とするとき, 以下のように記述される.

$$\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0},\ \mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0,$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t},\ \mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$$

問 1. 座標原点に置かれた, 振幅 p, 角振動数 ω で z 軸方向に振動する電気双極子モーメント $\mathbf{p} = p\exp(i\omega t)\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトル) が十分遠方で作る電場および磁場の, 極座標系 $r\theta\varphi$ での各成分を求めよ. ただし, この電気双極子モーメントが作るベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は, $k = \omega/c$ を用いて次式で与えられるものとする.

$$A_r = i\omega\frac{\mu_0 p}{4\pi}\frac{\exp[i(\omega t - kr)]}{r}\cos\theta,\ A_\theta = -i\omega\frac{\mu_0 p}{4\pi}\frac{\exp[i(\omega t - kr)]}{r}\sin\theta,\ A_\varphi = 0$$

また, 以下の極座標系における公式を用いてもよい. $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ は各軸方向の単位ベクトルである.

$$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{A} \ &= \ \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right\}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right\}\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

問 2. xy 平面上で点電荷 q ($q > 0$) が半径 a の円周上を一定の角速度 ω で円運動 (ただし $a\omega \ll c$) している.

(a) この点電荷の運動は, 直交して置かれた 2 つの振動する電気双極子モーメントの和で表すことができる. これらの電気双極子モーメントを記述する式を書け.

(b) この点電荷が単位時間あたりに放射する全エネルギー P は次式で与えられることを示せ.

$$P = \frac{\omega^4 q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

問 3. 陽子の周りで円運動をする電子 (電荷 $-e$, 質量 m) を考える. 古典論によれば, この運動により電子は電磁波を放射して徐々にエネルギーを失い, らせん軌道を描きつつ, 陽子に落ち込むと考えられる. 以下では, 電子の軌道を円軌道とし, その軌道半径が時間とともに減少していくものとして扱ってよい.

(a) 軌道半径の変化に伴う電子の全エネルギー E の変化量 dE/dr を, r の関数として表せ.

(b) 軌道半径の時間変化率 dr/dt を r の関数として表せ.

(c) 半径 $r = r_0$ にあった電子が陽子に落ち込む ($r = 0$) までの時間を求めよ. 得られた結果が時間の次元を持つことを示せ.

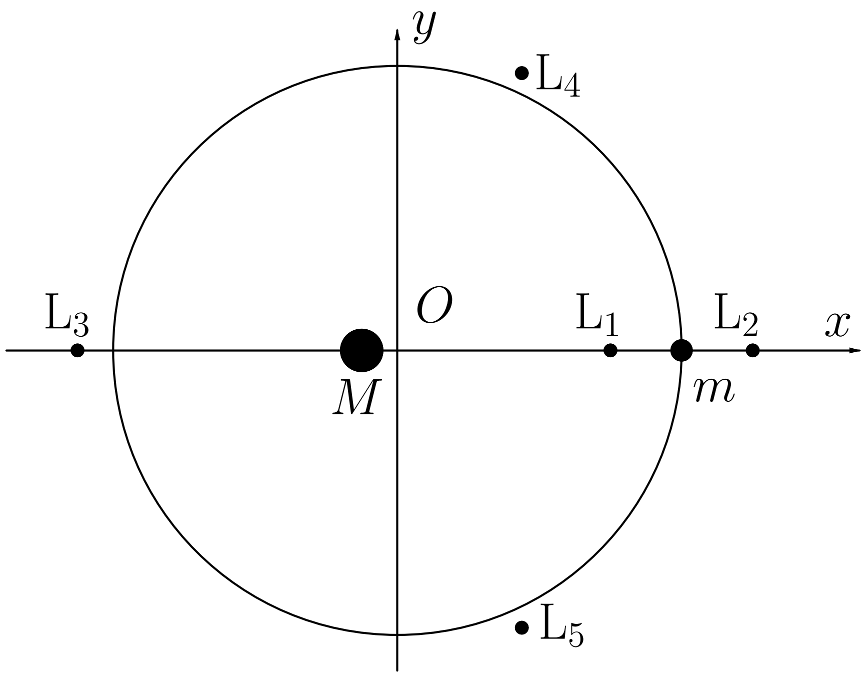
[天文学 1]

太陽と地球からなる力学系がある．太陽と地球は共通重心の周りをそれぞれ円軌道で周回するものとする．この系で運動する人工惑星について，太陽と地球との相対位置を変えずに公転できる点が 5ヶ所存在することが知られている．ラグランジュ点 (L_1–L_5) と呼ばれるこれらの点では，太陽と地球の引力の合力と，この系と同じ公転周期で公転する人工惑星の遠心力が釣り合っている．下図は，太陽，地球，5 つのラグランジュ点の位置関係の概略を示したものである．太陽と地球を通る直線を x 軸，軌道面内にあって x 軸に垂直な方向を y 軸，共通重心 O を原点とする．図を参考にして，以下の問 1–3 に答えよ．なお，万有引力定数を G，太陽と地球の質量をそれぞれ M, m とし，太陽と地球間の距離を R とする．人工惑星の質量は無視できるものとする．

問 1. 地球の公転角速度を求めよ．

問 2. x 軸上には 3 つのラグランジュ点が存在する．これらを L_1, L_2, L_3 とし，その x 座標を順に x_1, x_2, x_3 とする．x_1, x_2, x_3 がそれぞれ満たす条件式を記せ．

問 3. x 軸から外れた位置には 2 つのラグランジュ点が存在する．これらを L_4, L_5 とし，座標を順に (x_4, y_4), (x_5, y_5) とする．これらの座標を求めよ．



[天文学 2]

球対称な恒星の内部構造は以下の式で記述される:

$$\text{静水圧平衡：}\ \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \tag{1}$$

$$\text{連続の式：}\ \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{2}$$

$$\text{エネルギー輸送：}\ \frac{dT}{dm} = -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\kappa L_r}{r^4 T^3} \tag{3}$$

$$\text{状態方程式：}\ p = nkT \tag{4}$$

ここで, m は恒星中心からの距離 r を半径とする球のなかに含まれる質量である. p, ρ, T, κ, L_r, n はそれぞれ r での圧力, 密度, 温度, 単位質量当たりの吸収係数, 光度, 単位体積当たりの全粒子数である. G は万有引力定数, a は輻射定数, $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ は光速度, k はボルツマン定数を表す. エネルギーは輻射で運ばれると仮定している. 恒星内部では水素とヘリウムは完全電離しているとし, 水素とヘリウムの質量比をそれぞれ X, Y とする $(X + Y = 1)$. 以下の問 1–7 に答えよ.

問 1. 恒星の中心の圧力 p_c と密度 ρ_c を恒星の質量 M と半径 R を用いて近似的に求めてみよう. 恒星の表面では温度, 圧力, 密度をゼロとし, 例えば (1) 式の左辺の微分を表面と中心での差分で近似し, $-\frac{p_c}{M}$ とする. 右辺に現れる変数は平均をとり, $r \sim \frac{R}{2}$, $p \sim \frac{p_c}{2}$ のように表すことにする. 静水圧平衡と連続の式にこのような近似を用いて, p_c と ρ_c を R と M を用いて表せ.

問 2. $n = \frac{\rho}{\mu m_\mathrm{H}}$ で定義される μ を, X と Y で表せ. ここで m_H は水素原子の質量である.

問 3. 問 1 で求めた結果を (4) 式に代入して, 恒星の中心温度 T_c を, R, M, μ_c を用いて表せ. ここで μ_c は中心での μ の値である.

問 4. 問 1 と同じ近似を (3) 式に適用して, 恒星の光度 L は M と

$$L \propto \frac{acG^4}{\overline{\kappa}}\left(\frac{\mu_c m_\mathrm{H}}{k}\right)^4 M^3$$

の関係にあることを示せ. ここで $\overline{\kappa}$ は κ の星全体での平均値である.

問 5. 太陽のような恒星では

$$\overline{\kappa} \propto \rho_c T_c^{-3.5}$$

で表されるとすると, 光度 L は μ_c, M, R と

$$L \propto \mu_c^{7.5} M^{5.5} R^{-0.5}$$

の関係にあることを示せ.

問 6. 太陽の輻射エネルギーの源は, 水素がヘリウムに変わる中心での核融合反応である. 太陽が主系列に到達してから現在までの 45 億年間に失われた質量は, 太陽の質量のおよそ何%であるか, 太陽光度が 45 億年間一定であるとして見積もれ. 太陽の現在の質量 M, 光度 L は, それぞれ $M = 2 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$, $L = 4 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$ である.

問 7. 太陽が主系列に達してから現在まで光度は実は増大している. 問 5 と問 6 の結果をもとに, 太陽の半径を一定として, この理由を説明せよ.