

平成 26 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専 門 科 目

平成 25 年 8 月 27 日 (火) 13 時 00 分 - 17 時 00 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない。
2. 問題冊子は、この表紙を含めて全部で 9 ページである。
3. 答案用紙は、各問につき 1 枚、合計 4 枚配布してある。確実に配布されていることを確かめよ。
4. 問題は数学 2 問、物理学 2 問、天文学 2 問の計 6 問ある。このうちから、数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 問を含む 4 問を選んで解答せよ。
5. 各答案用紙の所定欄に、問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ。問題番号は、数学 1、物理学 2、天文学 1 などのように、科目と番号で記入せよ。
6. 解答は、各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ。必要なら裏ページを使用してもよい。
7. 解答できない場合でも、4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入して提出せよ。
8. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが、足りなくなった場合は手を挙げて請求すること。

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学 1]

以下の (A) 式で定義される多項式 $P_n(x)$ を考える. ここで, n は非負整数, x, t は実数であり, $|x| \leq 1$, $|t| < 1$ とする.

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (\text{A})$$

以下の問 1-5 に答えよ.

問 1. $P_n(1) = 1$ であることを示せ.

問 2. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ となることを示せ.

問 3. (A) 式の両辺を t に関して微分することにより, 次の漸化式が成立することを示せ.

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (\text{B})$$

問 4. (A) 式の両辺を x に関して微分することにより, 次の式が成立することを示せ.

$$\frac{d}{dx}P_{n+1}(x) + \frac{d}{dx}P_{n-1}(x) = 2x\frac{d}{dx}P_n(x) + P_n(x) \quad (\text{C})$$

問 5. (i) (B) 式と (C) 式を用いて, 次の二つの式が成立することを示せ.

$$\frac{d}{dx}P_{n-1}(x) = -nP_n(x) + x\frac{d}{dx}P_n(x) \quad (\text{D})$$

$$\frac{d}{dx}P_{n+1}(x) = x\frac{d}{dx}P_n(x) + (n+1)P_n(x) \quad (\text{E})$$

(ii) (D) 式と (E) 式を用いて, $P_n(x)$ が n 次の微分方程式を満たすことを示せ.

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx}P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (\text{F})$$

(iii) (F) 式を用いて, $m \neq n$ のとき, 以下の式が成立することを示せ (m は非負整数).

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad (\text{G})$$

[数学 2]

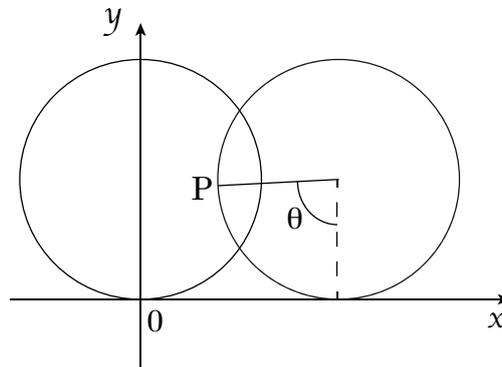
平面上の滑らかな曲線について、以下の問 1 及び問 2 に答えよ。

問 1. 曲線上のある点における曲率半径とは、その点のまわりの曲線の微小部分を円弧で近似したうえで、その微小部分を無限小の極限にしたときの円弧の半径のことである。また、その円弧の中心を、その点での曲率の中心という。以下の (a) 及び (b) に答えよ。

- (a) 曲線上の点 A の直交座標を (x, y) とする。A での曲率半径を、A における曲線の 1 階微分 dy/dx 及び 2 階微分 d^2y/dx^2 を使って導き表せ。
- (b) 点 A での曲率の中心の座標を導け。

問 2. 半径 1 の円が定直線に沿って滑らずに転がって進む状況を考える。初めに定直線と接していた円周上の定点 P の軌跡に関して、以下の (a)–(f) に答えよ。

- (a) 点 P の初期位置を原点とし、定直線を x 軸とする直交座標系を考える。下図の様に、円が角度 θ 回転したときの P の座標 (x, y) を θ を使って表せ。

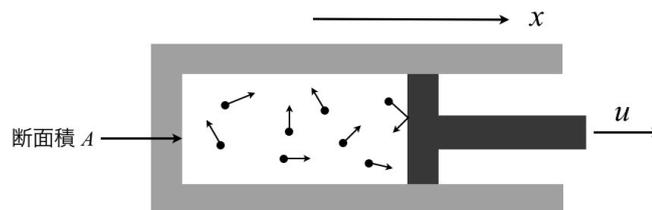


- (b) 円が一回転するまでの点 P の軌跡の長さを求めよ。
- (c) 上記 (a) の時点における軌跡の曲率半径を θ を使って表せ。
- (d) 同じく、曲率の中心の座標を θ を使って表せ。
- (e) 円が一回転するまでの点 P の軌跡について、曲率の中心の軌跡の長さを求めよ。
- (f) 円が一回転するまでの点 P の軌跡と、その曲率の中心の軌跡によって囲まれる面積を求めよ。

[物理学 1]

回転や振動などのために、気体分子に d 個の内部自由度が存在する場合、多くの気体ではその定積熱容量 [単位温度あたりの内部エネルギーの変化率, $(\partial U/\partial T)_V$] が内部自由度のない気体に比べて $(3+d)/3$ 倍になることが知られている。これを統計力学的に考察しよう。分子はボルツマン分布に従うものとし、気体分子間に働く力や、分子の大きさは無視する。気体分子の質量を m 、気体の温度を T 、気体の圧力を p 、プランク定数を h 、ボルツマン定数を k とする。以下の問 1–6 に答えよ。

- 問 1. まず、内部自由度のない気体を考える。気体分子の並進運動量を $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ とする。一つの気体分子について、単位体積あたり、微小運動量空間 $dp_x dp_y dp_z$ あたりの状態数をプランク定数を用いて答えよ。
- 問 2. 内部自由度がなく、分子の運動速度が非相対論的な気体において、 (p_x, p_y, p_z) に対応する分子の運動エネルギーを $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ とする。 ϵ_x の期待値 $\bar{\epsilon}_x$ を求めよ。さらに、 N 個の気体分子からなる系の、並進運動 1 自由度あたりの定積熱容量を答えよ。
- 問 3. d 個の内部自由度がある場合に、冒頭で述べたように定積熱容量が $(3+d)/3$ 倍になるためには、内部自由度が満たすべき条件がある。ある一つの内部自由度 w についての正準運動量 p_w に対して、1 粒子のもつ全エネルギーが $\epsilon_{\text{tot}}(p_x, p_y, p_z, p_w)$ という関数で書けるとき、 ϵ_{tot} の関数形が満たすべきその条件を述べよ。
- 問 4. 前問の条件が満たされた熱平衡状態の気体の断熱膨張あるいは圧縮を考える。熱力学第一法則から、 $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ が成立することを示し、 γ を d の関数として求めよ。ここで V は気体の体積、 γ は比熱比であり、状態方程式 $pV = NkT$ を用いてよい。
- 問 5. 前問の結果は、気体分子運動論的にも導くことができる。下図のように断面積 A のシリンダー内に気体を閉じ込め、ピストンを右方向にゆっくりとした速度 u で引く。右方向を x 軸に取る。



- (a) x 軸方向の運動量 p_x を持った気体分子がピストンの壁に弾性衝突して跳ね返った場合、運動エネルギーの変化量 $\delta\epsilon_{\text{kin}}$ を求めよ。ただし、 u は分子の運動速度に比べて十分に小さいとし、 u の 1 次まででよい。
- (b) 気体分子の数密度を n 、 x 軸方向の運動量分布を $f(p_x)$ とする。(すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} f(p_x) dp_x = n$ である。) 単位時間あたりに気体が壁との弾性衝突で失う全内部エネルギー δU を、 p_x に関する積分で表し、さらに δV 、 $\bar{\epsilon}_x$ 、 V 、 N で表せ。ここで δV は単位時間あたりの体積変化量である。
- (c) 気体の内部エネルギーは、分子の並進運動と内部自由度に関して常に等分配されるとする。このとき、問 4 と同じ T と V の関係式が導かれることを示せ。
- 問 6. 気体粒子の運動が相対論的で、ほぼ光速の場合について考察する。この場合、三次元空間内の並進運動 1 自由度あたりの定積熱容量は、非相対論的な気体のものと同じようには定義できなくなる。その理由を述べ、粒子数が N で内部自由度がない場合の気体の定積熱容量を求めよ。

[物理学 2]

電磁場内での荷電粒子の運動は、宇宙や実験室などにおけるプラズマの力学を考えるための基礎となるものである。荷電粒子の質量を m 、電荷を q 、速度を \mathbf{v} とするとき、以下の問 1-3 に答えよ。

問 1. まず、荷電粒子が一様な静磁場 \mathbf{B} 中において非相対論的な速度で運動する場合を考える。電場はないものとする。

- (a) 荷電粒子の運動方程式をベクトル式で書け。
- (b) (a) において、速度ベクトルを \mathbf{B} に垂直な成分 \mathbf{v}_\perp と平行な成分 \mathbf{v}_\parallel に分け、それぞれの運動方程式を書け。
- (c) 荷電粒子の \mathbf{B} に垂直な平面上の射影点の運動が等速円運動であることを示し、その半径 r と角速度 ω を求めよ。
- (d) 荷電粒子が正電荷イオンである場合の運動を 3 次的に図示せよ。ただし、 \mathbf{B} は z 軸の正の方向にとるものとする。

問 2. 今度は、一様な静磁場 \mathbf{B} に加えて一様な静電場 ($\mathbf{E} \neq 0$) がある場合の、荷電粒子の非相対論的運動を考える。

- (a) 荷電粒子の運動方程式をベクトル式で書け。
- (b) これ以降 (d) までは、磁場と電場の x, y, z 成分が $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ であるとし、荷電粒子は電荷 $q = -e$ の電子であるとする。このとき、運動方程式の z 成分を書き、電子が \mathbf{B} 方向にどのような運動をするかを述べよ。
- (c) 運動方程式を解いて、電子の速度の x 成分 v_x および y 成分 v_y の時間発展を求めよ。ただし、 $t = 0$ において $v_x = 0$, $v_y = v_0$ とする。
- (d) (b), (c) の結果に基づき、電子が 3 次的にどのような運動をするかを述べよ。

問 3. 今度は、一様な静磁場 \mathbf{B} の中で荷電粒子が相対論的な運動をする場合を考える。電場はないものとする。この場合の運動方程式は以下の式となる。ここで m_0 は静止質量、 $\beta = v/c$ (v は \mathbf{v} の絶対値、 c は光速) である。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = (q \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

このとき、 \mathbf{B} に垂直な平面上の射影点の運動は、問 1 と同様に等速円運動であることを示せ。また、その半径 r を求め、角速度 ω の v への依存性を表す式を導け。

[天文学 1]

X線天文学の初期の時代より、明るいX線天体以外に、全天から一様にやってくる宇宙X線背景放射の存在が知られていた。その起源は長い間謎であったが、その主な理由は、初期のX線観測装置の角度分解能と感度が不十分で、空間的に広がったガスからのX線放射と、たくさんの暗いX線点源の重ね合わせを区別できなかったからである。現在では観測装置の性能が向上し、宇宙X線背景放射の大部分は多数の暗い点源(活動銀河中心核)に分解されている。ここでは宇宙X線背景放射がすべて活動銀河中心核の重ね合わせで構成されていると仮定し、以下の問1-3に答えよ。観測エネルギー範囲は2 keVから10 keVとする。なお、簡単のために宇宙論的赤方偏移の影響は無視し、宇宙を静的な三次元空間と仮定する。また、宇宙には同じ光度(単位は J s^{-1})の活動銀河中心核が等密度で存在すると仮定する。解答の数値の近似が必要な場合は、有効数字一桁で求めよ。

問1. (a) 仮に宇宙が無限の広がりを持つとすると、観測される宇宙X線背景放射の表面輝度は無限大になることを示せ。

(b) 実際には宇宙X線背景放射の表面輝度は無限大ではない。その理由を簡単に述べよ。

問2. あるX線フラックス S (単位は $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$)より明るい活動銀河中心核の表面数密度(単位立体角当たりの数)を $N(> S)$ と表すことにする(単位は 個 sr^{-1})。横軸に S の対数、縦軸に $N(> S)$ の対数をとったグラフを考える(これを $\log N - \log S$ プロットと呼ぶ)。 $\log N$ と $\log S$ の関係を求めよ。

問3. 観測によると、宇宙X線背景放射の平均表面輝度は約 $5 \times 10^{-11} \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{sr}^{-1}$ である。

(a) X線背景放射の表面輝度を全天で積分し、それを明るい銀河系内X線天体さそり座X-1からのフラックス(約 $3 \times 10^{-10} \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$)と比較せよ。

(b) 全天で最も明るい活動銀河中心核と最も暗い活動銀河中心核のX線フラックスを、それぞれ S_{\max} 、 S_{\min} とする。 $\log N - \log S$ プロットが、問2で求めた関数型で S_{\max} から暗い方に S_{\min} まで伸びていると仮定し、これらの活動銀河中心核の重ね合わせが宇宙X線背景放射を構成しているとする。 $N_{\min} \equiv N(> S_{\min})$ と定義したとき、宇宙X線背景放射の表面輝度を S_{\min} と N_{\min} で表せ。ただし、 $S_{\max} \gg S_{\min}$ を仮定する。

(c) あるX線天文衛星によって、検出感度 $3 \times 10^{-14} \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$ より明るい活動銀河中心核の表面数密度が、5個 sr^{-1} と測定されたとしよう。これと宇宙X線背景放射の平均表面輝度の観測値から、 S_{\min} と N_{\min} の値を求めよ。

(d) 上で求めた N_{\min} の値を用いて、宇宙X線背景放射を点源に分解するために必要なX線望遠鏡の角度分解能を見積もれ。単位は分角で表すこと。

(e) 宇宙X線背景放射を完全に点源に分解できる角度分解能を備えたX線望遠鏡を考えよう。望遠鏡の集光面積を 1m^2 と仮定する。それによって同じ方向から10個のX線光子が検出されたら、有意にX線点源が検出されたと判断する。簡単のために、すべての活動銀河中心核は4 keVの光子のみを放出しているとする。フラックス S_{\min} を持つ活動銀河中心核を検出するために必要な観測時間を見積もれ。ここで、 $1 \text{keV} = 1.6 \times 10^{-16} \text{J}$ を用いよ。

[天文学 2]

銀河中心にある超大質量ブラックホールについて考える。以下の問1-3に答えよ。数値解は有効数字一桁で示せ。ここでは以下の値を用いよ。

$$\text{万有引力定数 } G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\text{パーセク pc} = 3.1 \times 10^{16} \text{ m}$$

$$\text{太陽質量 } M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

問1. M87 銀河の中心には超大質量ブラックホールが存在する。このブラックホールには質量と厚さの無視できるガス円盤が付随しており、円盤内のガスは、ブラックホールを中心とした向きの揃った円軌道のケプラー運動をしているとする。この円盤に下ろした垂線と観測者方向の間の角度を i とする。以下では、ガス円盤から出る輝線を用いて、円盤の運動を調べる。

(a) 図1のように、円盤中心からの角距離が θ である天球面上の円に沿って輝線の視線速度 V を測定したときの最大値を $V_{\max}(\theta)$ とするとき、ブラックホール質量 M_{BH} を θ と V_{\max} の関数で表せ。なお、M87 銀河までの距離を d 、宇宙膨張による後退速度を V_0 とし、正の速度は観測者から見て遠ざかる方向であるとせよ。

(b) 予想される $V_{\max}(\theta)$ の概形を図示せよ。さらに、 θ における視線速度の最小値 $V_{\min}(\theta)$ の概形も図に描け。解答の際は、答案用紙に図2を書き写し、予想される概形を線で描き、線が従う関数も明記せよ。また、 V_0 の位置も縦軸に明示せよ。なお、測定限界 $\leq \theta_{\text{Lim}}$ の範囲については線を描かなくてよい。

(c) 観測の結果、 $\theta = 0''.25 (> \theta_{\text{Lim}})$ で $V_{\max} = 1800 \text{ km s}^{-1}$ が得られた。これらからブラックホールの質量を見積もり、太陽質量を単位として表せ。なお、 $d = 15 \text{ Mpc}$ 、 $V_0 = 1300 \text{ km s}^{-1}$ であり、円盤の傾きは $i = 42^\circ$ とし、 $\sin(42^\circ) = 0.67$ を用いてよい。

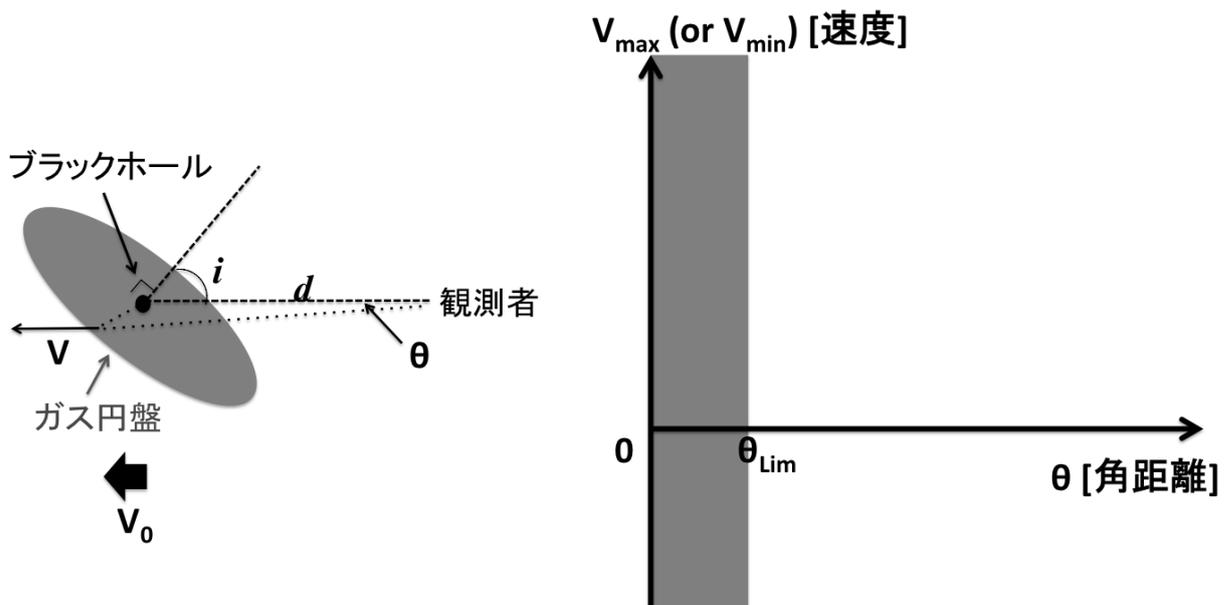


図 1:

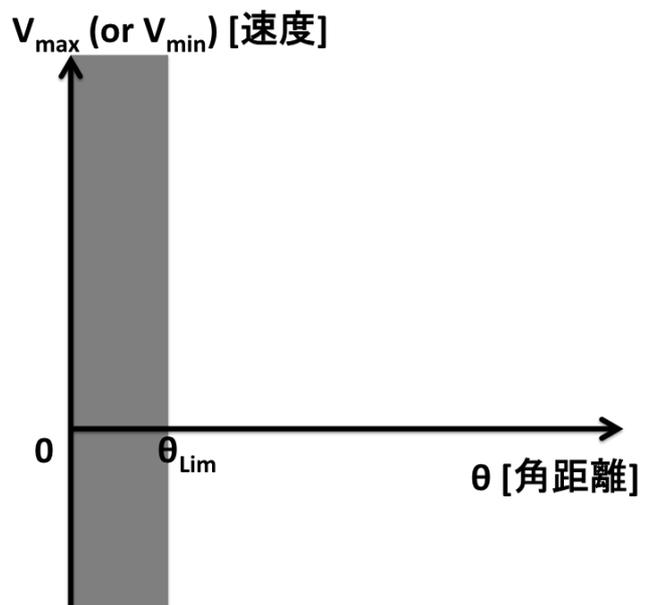


図 2:

問2. ブラックホールは周囲のガスが降着することで質量を増加させる. 一方で, ブラックホールに落ち込むガスは電磁波を放つ. その光度を L とする. これが外向きの放射圧を与えるため, 新たなガスの降着を妨げる. ある限界光度 (エディントン光度) に達するとガスが受ける放射圧と重力が釣り合う. 以下の考え方に従いエディントン光度と降着率を求めよ. 放射は等方的であり, 簡単のため, 放射圧は電子に働くトムソン散乱だけで決まり, 降着ガスは完全電離水素ガスであるとせよ.

(a) ブラックホールからの距離 r において1個の電子が放射から受ける力 F_{rad} を, L と r , 電子のトムソン散乱断面積 σ , 光速度 c を用いて表せ. ただしトムソン散乱は等方的であるとする.

(b) 電離水素の電子-陽子対がブラックホールから受ける重力と (a) で求めた外向きの力の釣り合いからエディントン光度 L_E を求めよ. 陽子の質量を m_p とする.

(c) 降着するガスの静止質量エネルギーのうち ϵ ($0 < \epsilon < 1$) の割合がブラックホールからの放射エネルギーに変わるとする. エディントン光度で光っているブラックホールの質量降着率 (単位時間当たりに降着するガスの質量) \dot{M}_E を, τ_E と ϵ , M_{BH} を用いて表せ. ただし, $\tau_E \equiv \sigma c / (4\pi G m_p)$ とする.

問3. 2011年 Daniel J. Mortlock らの研究グループは赤方偏移 $z = 7.1$ においてクエーサー ULAS J1120+0641 を発見した. このクエーサーは質量 $2 \times 10^9 M_\odot$ の超大質量ブラックホールを持つ. 宇宙誕生後間もない $z = 7.1$ までにこの質量のブラックホールが形成される物理過程を考える.

(a) エディントン光度で光っているブラックホールの質量増加を考える. 時刻 t_0 で質量 M_0 を持つブラックホールの時刻 $t_1 (> t_0)$ での質量を, τ_E と ϵ を用いて表せ. ここで ϵ は時間によらず一定とする.

(b) 大質量星の重力崩壊で作られた質量 $200 M_\odot$ のブラックホールが $z = 24$ に存在したと仮定する. このブラックホールが $z = 7.1$ までエディントン光度で光りながら質量を増やした場合の $z = 7.1$ における質量を求めよ. ただし, $z = 24$ と $z = 7.1$ の宇宙年齢はそれぞれ 0.1 Gyr と 0.7 Gyr である. また, $\tau_E = 0.45 \text{ Gyr}$ であり, $\epsilon = 0.1$ とせよ. 計算では $e^{10} = 2.2 \times 10^4$ を用いてよい.

(c) (b) の結果は ULAS J1120+0641 のブラックホール質量が $2 \times 10^9 M_\odot$ であることを説明できない. 問2と問3で仮定した物理過程や条件が, 実際とは異なることが原因だろう. 物理的にあり得る原因を2つ以上考え, それらを具体的に説明せよ.