受験番号	
氏　　名	

平成 27 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

平成 26 年 8 月 26 日（火）　　13 時 00 分–17 時 00 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で 12 ページである.
3. 答案用紙は, 各問につき 1 枚, 合計 4 枚配布してある. 確実に配布されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 2 問, 物理学 2 問, 天文学 2 問の計 6 問ある. このうちから, 数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 問を含む 4 問を選んで解答せよ.
5. 問題冊子の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ
6. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ. 問題番号は, 数学 1, 物理学 2, 天文学 1 などのように, 科目と番号で記入せよ.
7. 解答は, 各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ. 必要なら裏ページを使用してもよい.
8. 解答できない場合でも, 4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入して提出せよ.
9. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと.
10. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学 1]

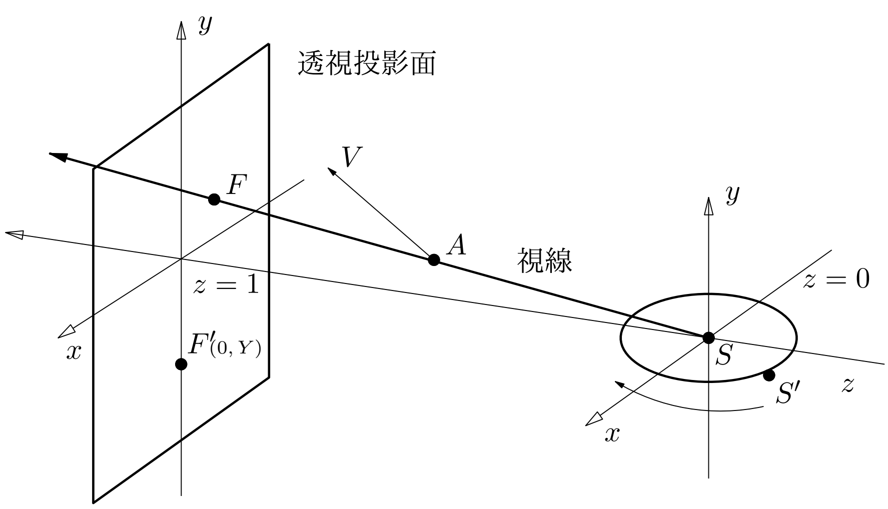
下図のように空間に直交座標系 x, y, z をとり, $z = 1$ の平面を透視投影面とする. 空間に視点 S と点 A をとり, この 2 点を結ぶ直線を視線とする. 視線と透視投影面の交点を F とするとき, 点 F は視線によって透視投影された点 A の写像である.
このとき, 以下の問 1-4 に答えよ.

問 1. 視点 S を原点においたとき, 空間の点 $A = (A_x, A_y, A_z)$ の写像 F の座標 (x, y) を求めよ. ただし $A_z > 0$ とする.

問 2. 点 A が初期位置 (A_{0x}, A_{0y}, A_{0z}) から速度 $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ で等速度運動する. このときの写像 F の座標 (x, y) を式で示せ. またこの軌跡の振舞いを時間の経過と合わせて説明せよ. ここで $V_z > 0$ かつ $A_{0z} > 0$ とする.

問 3. 問 2 と同じように空間の点 $A = (A_x, A_y, A_z)$ が等速度運動し, もう一つの視点 S' が xz 平面上の原点を中心とした半径 R の円周上を等角速度 ω で回転運動するとき, 視点 S' による空間の点 A の写像の軌跡を式で示せ. またその振舞いを時間の経過と合わせて説明せよ. ただし $1 > A_{0z} > R > 0$ かつ $V_z > 0$ とする.

問 4. 視点が問 3 のように運動しているとき, 写像 F' が座標 $(0, Y \neq 0)$ に固定点として現れた. このとき, 空間の点 A の位置は一意には決まらない. 時間 t と変数 $T(= A_y/Y)$ を用いて空間の点 A の座標 (A_x, A_y, A_z) を式で示せ. また, 空間の点 A が $z = 0.5$ の平面上を動くとしたとき, 空間の点 A の軌跡が楕円になることを示せ.



[数学 2]

直交座標系 x, y, z で表される 3 次元空間内において速度ベクトル $\vec{v}(x, y, z, t)$ を持つ流れがあるとする．ここで t は時間である．この流れに沿った $\vec{v}$ の時間変化が次のような方程式で与えられるとする．

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{f} \tag{1}$$

ここで P, ρ はスカラー量, $\vec{f}$ はベクトル量, $\vec{\nabla}$ はナブラベクトルで $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ である．$\frac{D}{Dt}$ は流れに沿った時間微分を表すが, これは直交座標系 x, y, z での時間偏微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ と次のような関係

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})F \quad (F \text{ は任意の関数})$$

があるとする．すると, (1) 式は

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{f} \tag{2}$$

と書ける．
以下の問 1–5 に答えよ．

問 1. 次の式を証明せよ．ただし $v \equiv |\vec{v}|$ である．

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \tag{3}$$

問 2. $\vec{f}$ がある関数 ϕ を用いて $\vec{f} = -\vec{\nabla}\phi$ と書けるとし, さらに ρ が P のみの関数であるとし,

$$F(\rho) = \int \frac{dP}{\rho(P)}$$

と書くと, (2) 式は, $\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$ として

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}E + \vec{v} \times \vec{\omega} \tag{4}$$

の形に書ける．E を求めよ．

問 3. 流れが t に依存しない ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) と仮定すると流れに沿って E は一定であることを示せ．

問 4. 式 (2), (3), を用い, $\vec{f} = -\vec{\nabla}\phi$ を仮定すると,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - \vec{\nabla}\phi$$

となるが, この式に左から $\vec{\nabla}\times$ を作用させることにより

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \frac{1}{\rho^2}\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}P$$

と書ける事を示せ．またこの式は P が ρ のみの関数である場合,（右辺）$= 0$ であることを示せ．

問 5. P が ρ のみの関数である場合, ある閉曲線 C を考え, C に沿った周回積分

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

を定義すると, Γ は流れに沿った積分に対してゼロ, すなわち

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

であることをストークス（Stokes）の定理を用いて示せ.

[物理学 1]

問 1. 誘電率 ε, 透磁率 μ が一定の領域を考える. この領域では電流が流れておらず, 電荷もないとすると, この領域での電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が満たすマクスウェルの方程式は以下のように記述される. ここで t は時間である.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} &= \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} &= 0 \\
\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} &= 0
\end{aligned}
$$

(a) 上の方程式から $\boldsymbol{B}$ を消去し $\boldsymbol{E}$ が満たすべき偏微分方程式を求めよ.

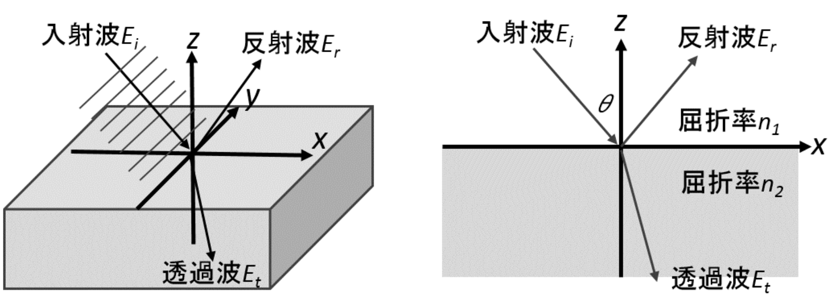
(b) 上の方程式の解を波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と空間ベクトル $\boldsymbol{x}$, 角振動数 ω を用いて

$$E = E_o \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$$

とかく. このときベクトル $\boldsymbol{k}$ の大きさ $|\boldsymbol{k}|$ が $|\boldsymbol{k}| = n\omega/c$ となることを示せ. ここで c は光速, n は領域の屈折率であり $c/n = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ である.

問 2. 上の応用として, 図のように屈折率 n_1 の領域 1 から屈折率 n_2 の領域 2 に平面波が入射する場合を考える (n_1, n_2 は実数). 入射波, 透過波の波数ベクトルの x, y, z 成分を各々k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}, k_{tz}, k_{ty}, k_{tz} と書く. ここで入射する電場は y 方向に偏光しているとすると $k_{iy} = k_{ty} = 0$ となる. このとき, 入射波, 反射波, 透過波のつくる y 方向の電場 E_i, E_r, E_t は各々以下のようにかける. なお, R, T はそれぞれ反射率, 透過率を示す.

$$
\begin{aligned}
\text{入射波} : E_i &= E_o \exp[i(k_{ix}x - k_{iz}z) - i\omega t] \\
\text{反射波} : E_r &= RE_o \exp[i(k_{ix}x + k_{iz}z) - i\omega t] \\
\text{透過波} : E_t &= TE_o \exp[i(k_{tx}x - k_{tz}z) - i\omega t]
\end{aligned}
$$



(a) $z = 0$ 面での電場の連続条件から $k_{ix} = k_{tx}$ となることを示せ. また R を T, k_{ix}, k_{iz}, k_{tz} を用いて表せ.

(b) $z=0$ 面では磁束密度も連続している必要がある．これから R を T, k_{ix}, k_{iz}, k_{tz} を用いて表せ．

(c) これらの関係式から T を求めよ．

(d) 問 1(b) で示した関係を用いるとある条件下では k_{tz} が純虚数になる場合がある．この条件を n_1, n_2 および入射波の入射角 θ を用いて示せ．

(e) k_{tz} が純虚数の場合は透過波は指数関数的に減衰する波（エバネッセント波）となる．この長さスケール（電場強度が 1/e となる長さ）δ を c, ω, n_1, n_2, θ を用いて表せ．

(f) エバネッセント波が発生する場合, 反射波のエネルギーは入射波のエネルギーと比べてどうなるか．式を用いて答えよ．

[物理学 2]

$S(x,y,z,t)$ 系とそれに対して等速度 v で x 方向に移動している $S^{'}(x^{'},y^{'},z^{'},t^{'})$ 系という 2 つの慣性系について考える．S 系と $S^{'}$ 系間のローレンツ変換は, 光速 c, ローレンツ因子 $\gamma \left(=1/\sqrt{1-(v/c)^2}\right)$ として,

$$
\begin{aligned}
x^{'} &= \gamma(x-vt) \\
y^{'} &= y \\
z^{'} &= z \\
t^{'} &= \gamma(t-vx/c^2)
\end{aligned}
$$

と記述される．特殊相対性理論を適用して以下の問いに答えよ．なお, 計算を求められるときは, 計算結果を有効数字 2 桁で示すこと．電子の質量として $m_{\mathrm{e}} = 9.1\times10^{-31}$ kg, 陽子の質量を $m_{\mathrm{p}} = 1.7\times10^{-27}$ kg, 光速 $c = 3.0\times10^{8}$ m/s, プランク定数 $h = 6.6\times10^{-34}$ J s, 素電荷 $e = 1.6\times10^{-19}$ C とする．

問 1. ほとんど静止状態にある電子と陽電子が反応して二つのガンマ線光子が発生する反応がある．このとき, 一つのガンマ線光子のエネルギーを eV の単位で求めよ．

問 2. ある電荷をもった粒子を静止状態から同じ条件で加速したときに最終速度が光速の 80%に達した．この粒子と同じ電荷をもち質量が 1/4 の粒子を静止状態から同じ電場で加速した場合を考える．このとき得られる粒子の最終速度を光速を単位にして求めよ．

問 3. 原子に弱く束縛されていてほとんど自由とみなせる電子に X 線を照射すると散乱された X 線の波長が変化する現象がある．$\mathbf{e}_1$ 方向へ向けて電子に入射した X 線の波長を λ_1, $\mathbf{e}_2$ 方向に散乱された X 線の波長を λ_2 としたとき, (1) エネルギー保存則と運動量保存則を反応後の電子の運動量 $\mathbf{p}$ をもちいて書き出し, (2) それを解くことで散乱角 θ ($\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 \equiv \cos\theta$) 方向に散乱された X 線の波長変化量を θ の関数として求めて散乱光子の波長が長波長側にずれること, また (3) $\theta = 90^\circ$ のときの波長変化量を計算して nm 単位で示せ．ここで, $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ は単位ベクトルを表し, また電子の静止質量は m_{e}, プランク定数を h とする．

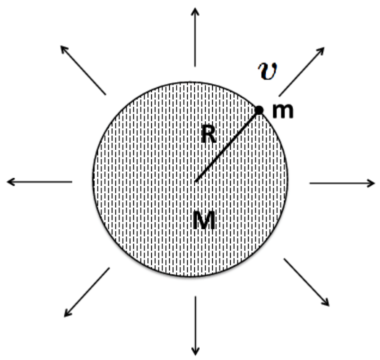
問 4. ある慣性系において, 陽子が速度 v_1 で等速運動し, もう一つの陽子が同一直線上を逆向きに速度 v_2 で等速運動している場合を考える．このときのローレンツ因子をそれぞれ $\gamma_1 = \gamma(v_1)$, $\gamma_2 = \gamma(v_2)$ とする．v_2 で運動する陽子が静止するような慣性系からもう一方の陽子を見たとき, 運動する陽子のローレンツ因子 γ を γ_1, γ_2 で記述せよ．

問 5. 同じ一定速度で 2 つの陽子を正面衝突させるとき, それぞれの陽子が運動エネルギーとして 1 GeV ずつをもつときに陽子-反陽子生成反応が起こるようになる．一方の陽子が静止し, それに対してある運動エネルギーをもった陽子を衝突させてこの反応を起こすようにしたい．このとき運動する陽子の最低運動エネルギーを求めよ．簡単のため, 陽子の静止エネルギーは 1 GeV とする．

[天文学 1]

宇宙はビッグバンで始まり, その後電離したガスは膨張で冷えて再結合し, 電磁波に対して透明になった. 宇宙マイクロ波背景放射は, 透明になる以前の宇宙の化石を見ていると言える.
次の問いに答えよ.

問 1. ニュートン力学を用いて宇宙膨張の力学を考えてみよう. 宇宙膨張は一様で等方とする. 今, 半径 R のところに質量 m の銀河が位置しているとしよう (下図参照). この銀河は, 速度 $v = HR$ で動径方向に遠ざかるように運動している (ハッブルの法則). 宇宙は非相対論的な物質で満たされており, その平均密度は ρ とし, 他の銀河も同様に動径方向に運動しているとする. また, この銀河より内側の質量は M とする. 物質の生成・消滅はないとして, 質量 M は変化しないとする.



(a) この銀河の位置エネルギーと運動エネルギーの総和を E_T としたとき, $E_T = 0$ となる平均密度を求めよ.

(b) $E_T =$ 一定とし, R を宇宙の大きさの指標と考え, R が満たす R の一階時間微分を含む微分方程式を求めよ. また, $E_T = 0$ の場合の微分方程式を解いて $R = R(t)$ を求めよ. ここで, t は時間である.

(c) 宇宙膨張に乗った共動座標系では, 単位振動数あたりの放射エネルギー密度 u を $h\nu$ で割った $n(= u/h\nu)$ を用いると光子数保存の関係 (式 (1)) が成り立つ. いま, 光子のエネルギー密度は, $E_{ph} = n_{ph}h\nu$ で与えられるとしよう. n_{ph} は個数密度である. 宇宙膨張にともなって n_{ph} や振動数 ν はどのように変化するかを考え, E_{ph} が R にどのように依存するかを求めよ. ここでは, 式 (1) の $n\mathrm{d}\nu$ が n_{ph} に対応する. また, 電磁波は宇宙膨張にともない波長が増加する.

$$n(\nu, T)\mathrm{d}\nu R(t)^3 = n(\nu_0, T_0)\mathrm{d}\nu_0 R(t_0)^3 \tag{1}$$

(d) 赤方偏移 z は, 以下で定義される.

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emi}}{\lambda_{emi}} \tag{2}$$

ここで λ_{obs} , λ_{emi} は観測波長と静止座標系での波長である．R と z の関係を求めよ．現在の宇宙では $R = R_0$ とする．

(e) 黒体放射のエネルギー密度と温度のべき乗の関係を用いて, 温度が R の何乗に比例するか求めよ．現在の宇宙の背景放射の温度は, およそ 3 K であることがわかっている．再結合の時期が $T = 3000$ K で起こったと仮定しよう．温度が t の何乗に比例するかを求め, 現在の宇宙年齢を $t_0 = 1.4 \times 10^{10}$ 年とし, 有効数字一桁で再結合の時期の宇宙年齢を求めよ ($\sqrt{10} = 3.2$ で計算せよ).

問 2. 透明になる以前の宇宙では, 宇宙は黒体であったと考えられる．電磁波に対して透明になった現在の宇宙では, 光子 (宇宙背景放射) のエネルギー密度が黒体放射を記述するプランクの式 (単位振動数あたりのエネルギー密度の形で書くと, 式 (3)) で表わすことができるかは自明ではない．式 (1) を用いて, 透明になった現在の宇宙 (T_0, t_0, ν_0) でも, 現在の光子のエネルギー密度 $u(\nu_0, T_0) = n(\nu_0, T_0)h\nu_0$ がプランクの式で表せることを示せ．光速度 c, プランク定数 h, ボルツマン定数 k はいずれも宇宙の膨張で変化しないとする．

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \tag{3}$$

問 3. $z \ll 1$ の場合には, 距離と z の関係式はハッブルの法則から得られる (視線速度 cz は距離に比例する．比例定数は H_0). $z > 1$ の宇宙に対しても距離と z との関係式を求めたい．

(a) 問 1 で扱った宇宙モデルの場合に ($E_T = 0$), 現在の宇宙で距離を測ることを考える．$z = 0$ の観測者から赤方偏移 z の銀河までの距離 x は, 銀河から放射された光がある時間の間に光速で進んだ距離 ($c\,\mathrm{d}t$) を, その後の宇宙膨張の効果で距離が引き延ばされたことを膨張の指標となる R を用いて補正をして積分して求めることができる．距離 x を z の関数として $x = Const. \times f(z)$ の形で求めよ．ここでは, $R = R(t)$ として問 1 の R と同様の時間 t に対する依存性を用いよ．

(b) 上記 (a) で求めた式の $z \ll 1$ での近似式を求め, これとハッブルの法則との比較から $Const.$ を H_0 を用いて表し, $x = x(z)$ の式を完成させよ．

[天文学 2]

温度 T, 波長 λ での黒体からの放射は, 単位面積・単位立体角・単位時間・単位波長あたりで,

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(\frac{hc}{kT\lambda}) - 1} \tag{1}$$

である. ここで h はプランク定数, c は光速, k はボルツマン定数である. 一般の物体からの熱放射はこの黒体からの放射に放射率 ϵ をかけたものになる. そして $\epsilon = 1$ が全波長で成り立つとき, 黒体と呼ぶ. 黒体放射は, 温度 T に対してある波長 λ_{max} で最大になる.

問 1. 黒体からの全放射エネルギーを求めるために, 下図のように物体表面の面要素 δS を考え, そこを中心に極座標系をとり, そこから (θ, ϕ) 方向の立体角 $\mathrm{d}\Omega$ に放射される単位波長あたりのエネルギー $\delta F(\lambda)$ を考えよう.

(a) 立体角 $\mathrm{d}\Omega$ を極座標系の θ, ϕ, 及び $\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ を用いて書け.

(b) (θ, ϕ) 方向は面要素に対して垂直な方向ではないことを考慮して $\delta F(\lambda)$ を $B(\lambda)$ を用いて書け.

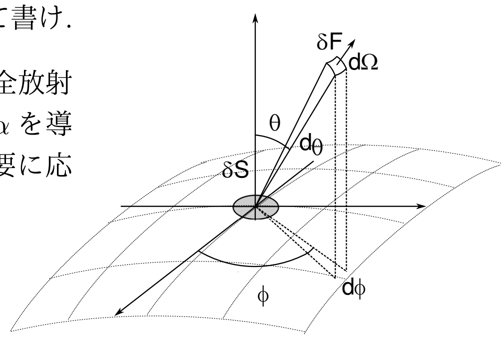
(c) $\delta F(\lambda)$ の全放射方向の積分を行って, 単位面積あたり, 単位波長あたりの放射エネルギーを $B(\lambda)$ を用いて書け.

(d) 全波長で積分することにより, 単位面積あたりの全放射エネルギー I は $I = \sigma T^{\alpha}$ と書けることを示し, α を導け. また σ を h, c, k を用いて書け. この時, 必要に応じて次の積分値を用いよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{e^x - 1} \simeq 24.888$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} = \frac{8\pi^6}{63}$$



さて, 星の周辺に, その星からの放射をうけて熱エネルギーを得て, それを黒体放射として再放射することによって一定の温度を保っている物体があったとしよう. この物体の温度がどうなるかを考察する.

問 2. 物体は星からの距離 D のところにある半径 R_d の球とする. また, これは黒体で全ての波長で吸収率も放射率も 1 であるとする. 星からの放射量は単位時間あたり L であり, 星自身の大きさによる効果は無視できるとする. 物体の温度が T_d になっているとし, エネルギーの釣り合いを考え, L, D, R_d, σ の間の関係式を示し, T_d が星からの距離 D と星の明るさ L に対してどのように変化するのかを示せ.

星の放射量として我々の太陽の値を用い, 距離 D に地球 – 太陽間距離を用いて計算すると, $T_d = 280$ K が得られ, ほぼ地球の温度と一致する. また, この温度の物体は波長が $\lambda_d = 10\ \mu$m で放射のピークを持つ. 遠方からこの物体と星を観測することを考えよう. 星の放射は温度 $T_* = 5780$ K の黒体で近似できるとし, 星の半径を R_* とする.

問 3. 波長 λ_{obs} において, $\Delta\lambda$ の波長バンド幅で測光観測を行うとする.

(a) 観測波長 λ_{obs} での星の明るさ F_* に対するこの物体の明るさ F_d の比 $\frac{F_d}{F_*}$ を示せ.

(b) ある温度 T に対して, 放射が最大になる波長よりも十分に長い波長での黒体放射 $B(\lambda)$ を波長 λ のべき乗の式で表せ.

(c) 観測波長が物体の放射のピーク波長よりも十分に長いときの明るさの比を求めよ.

(d) 物体の半径は星半径の 1/100(太陽に対する地球より少し小さめ) のものを考えよう. 物体の放射のピーク波長よりも十分に長い波長で星と物体を合わせて測光観測するとき, 物体からの光の明るさは, 中心の星からの光に対してどれだけになるか. 有効数字 1 桁で答えよ.

(e) 次に小石程度の小さい物体が多数ある場合を考えよう. 物体の半径は星半径の 10^{-10} 倍の約 7 mm とする. この物体が何個あれば測光観測において中心星の 10%の明るさを持つようになるか. 以下の仮定を用いてその物体全重量はどれだけか求めて地球質量との比を有効数字 1 桁で求めよ. ここで, 物体 1 個の質量を 3 g (密度は岩石より少し軽い) とし, 地球質量 6×10^{27} g とする.

問 4. 以上の考察においては, 物体の放射率が波長に依存することなく全波長で 1 であるとしてきた. しかし, 放射の波長が物体の大きさよりも長くなると放射率は一定ではなくなる. そのようなものとして, 放射率が $\lambda \geq \lambda_0$ では

$$\epsilon(\lambda) = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

である場合を考えよう. このとき, λ_0 が熱放射のピーク波長よりも十分に小さいような場合では, $\lambda < \lambda_0$ の波長域からの寄与は十分に小さくて無視できるため, 全放射を波長で積分するときに上記の放射率を全波長範囲で仮定することができる. この場合に, 物体からの全放射エネルギーがどのように表せるか, 問 1 と同様に $I = \sigma' T^\beta$ と書けることを示し、β を導き, σ' を h, c, k を用いて書け. なお, 必要に応じて問 1 にあげた積分値を用いよ.

問 5. 問 4 の場合の物体の温度の星からの距離依存性を示せ.