受験番号	
氏　　名	

平成 28 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専　門　科　目

平成 27 年 8 月 25 日（火）　　13 時 30 分–17 時 30 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で 9 ページである.
3. 答案用紙は, 各問につき 1 枚, 合計 4 枚配布してある. 確実に配布されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 2 問, 物理学 2 問, 天文学 2 問の計 6 問ある. このうちから, 数学と物理学をそれぞれ少なくとも 1 問を含む 4 問を選んで解答せよ.
5. 問題冊子の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ
6. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ. 問題番号は, 数学 1, 物理学 2, 天文学 1 などのように, 科目と番号で記入せよ.
7. 解答は, 各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ. 必要なら裏ページを使用してもよい.
8. 解答できない場合でも, 4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入して提出せよ.
9. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと.
10. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学 1]

二次元曲面に関する以下の問いに答えよ．答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること．

問 1. 3 次元空間内で正の曲率を持つ半径 a の球面上に，点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ と，これを微小変位させた点 $\mathrm{Q}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ がある．点 P を x-y 平面上に射影した点 R の座標を，$(x, y, z) = (ar\cos\theta, ar\sin\theta, 0)$ と表すと，r は $0 \le r \le 1$ を満たす．

(a) 球面上の PQ 間の距離の自乗 $\mathrm{d}s^2$ は，式 (1) に $k=+1$ を代入して表されることを導け．

$$\mathrm{d}s^2 = a^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2\right) \tag{1}$$

(b) P, Q を $\mathrm{P}(0,0,a)$, $\mathrm{Q}(ar_1\cos\theta, ar_1\sin\theta, z)$ とするとき，PQ 間の距離を式 (1) を用いて計算せよ．ただし，$0 \le r_1 \le 1$ とする．

(c) θ を固定して r を変化させる場合と，$r=1$ に固定して θ を変化させる場合の二通りの方法で，大円の周の長さを計算せよ．

(d) 式 (1) の $\mathrm{d}r$ と $\mathrm{d}\theta$ を用いて球面上の面積要素を表し，球の表面積を計算せよ．

問 2. 次に 3 次元空間内で負の曲率を持ち，$x^2+y^2-z^2=-a^2$ を満たす双曲面上に，点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ と，これを微小変位させた点 $\mathrm{Q}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ がある．前問と同様に，点 P を x-y 平面上に射影した点 R の座標を，$(x, y, z) = (ar\cos\theta, ar\sin\theta, 0)$ と表すと，r は $0 \le r$ を満たす．

(a) 双曲面上の PQ 間の距離の自乗を $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$ で定義する．$\mathrm{d}s^2$ が式 (1) に $k=-1$ を代入して表されることを導け．

(b) P, Q を $\mathrm{P}(0,0,a)$, $\mathrm{Q}(ar_1\cos\theta, ar_1\sin\theta, z)$ とするとき，PQ 間の距離を式 (1) を用いて計算せよ．また，$r_1=1$ の場合，ここで計算した双曲面上（$k=-1$）および球面上（$k=+1$）の PQ 間の距離の大小関係を示せ．

(c) r を 0 から $r_1=1$ まで変化させたときの双曲面（$k=-1$）の面積を計算し，球（$k=+1$）の表面積と比較せよ．

[数学 2]

確率分布について以下の問 1–3 に答えよ．以下では確率分布の平均を μ, 分散を σ^2 と表す．答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること．

問 1. 1 回の試行で事象 A が起きる確率を p とする．

(a) n 回試行するときに A が x 回起きる確率関数 B_x を求めよ．

(b) 上で求めた確率関数を二項分布という．確率変数 X が二項分布に従うとき, X の平均と分散を求めよ．

問 2. ポアソン分布 P_x

$$P_x = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

について以下の問に答えよ．

(a) μ が有限で n が大きい極限で, 二項分布 B_x がポアソン分布になることを示せ．

(b) 確率変数 X がポアソン分布に従うとき, X の平均と分散が等しくなることを示せ．

問 3. 正規分布 $G(x)$

$$G(x) = Ce^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

について以下の問に答えよ．

(a) 規格化定数 C を求めよ．

(b) n が大きい極限で, 二項分布 B_x が正規分布になることを示せ．ここで B_x は x の連続関数とみなしてよいとする．

[物理学 1]

静止質量 m, 電荷 q の粒子が, 一定電場 (電界) $\boldsymbol{E}$ に絶対値 v_0 の速度で垂直に入射したときの, 入射後の運動を考察しよう. 運動は相対論的とし, 粒子からの放射は考えない. 入射の向きを x 軸に, 電場の向きを y 軸にとり, 入射した位置を $(x, y) = (0, 0)$ とする. 電場は $0 \leq x \leq x_0$ の領域にのみ存在するものとする. 速度の x 成分を v_x, y 成分を v_y, 光速度を c とする. 一般に, 速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する静止質量 m の粒子の運動量は $m\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2/c^2}$ である. 以下の問 1–6 に答えよ. ただし, 問 1–3 は電場の存在する領域のみを対象とせよ.

問 1. 運動方程式の x 成分を書き, それを用いて v_x を v_y で表せ.

問 2. 運動方程式の y 成分を書け.

問 3. 運動方程式を解いて v_x と v_y を求めよ.

問 4. 電場の存在する領域を通過するのにかかる時間を求めよ.

問 5. 電場を抜けた瞬間における粒子の y 座標を y_0, 速度の絶対値を V とする. y_0 を v_0 と V を用いて表せ.

問 6. 最初の粒子の入射から Δt 後に, 同じ静止質量と電荷の粒子が, 同じ位置から同じ速度と向きで電場に入射した. 電場を抜けた後における, 2 粒子と共に運動する系で測った 2 粒子間の距離はいくらか.

[物理学 2]

水素原子の基底状態でのエネルギー準位を求める．そのハミルトニアン H は

$$H = E_0 + C\left(\sigma_x^{\mathrm{e}}\sigma_x^{\mathrm{p}} + \sigma_y^{\mathrm{e}}\sigma_y^{\mathrm{p}} + \sigma_z^{\mathrm{e}}\sigma_z^{\mathrm{p}}\right) \tag{1}$$

と表される． E_0 と C は定数． σ^{e} と σ^{p} はそれぞれ電子と陽子のスピンに対するパウリ行列で, $k = \mathrm{e}, \mathrm{p}$, 虚数単位を i として次のように与えられる．

$$\sigma_x^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y^k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

スピンが上向きの状態をベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ または記号 $\uparrow$ で, スピンが下向きの状態をベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ または記号 $\downarrow$ で表し, 例えば電子のスピンが上向きで陽子のスピンが下向きになっている水素原子の状態を $|\uparrow\downarrow\rangle$ で表すことにする．以下の問いに答えよ．

なお, 数値の計算を求められるときは, 計算結果を有効数字 2 桁で示すこと．電子の質量を $m_{\mathrm{e}} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, 陽子の質量を $m_{\mathrm{p}} = 1.7 \times 10^{-27}$ kg, 光速度を $c = 3.0 \times 10^{8}$ m s^{-1}, プランク定数を $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s, 素電荷を $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, 真空の透磁率を $\mu_0 = 1.3 \times 10^{-6}$ m kg s^{-2} A^{-2} とする．

問 1. この水素原子は 4 つの状態をとるので, 波動関数は

$$|\psi(t)\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow|\psi(t)\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|\psi(t)\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|\psi(t)\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|\psi(t)\rangle$$

と表される．これを $|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{4} |j\rangle A_j(t)$ と表せば, 各状態の確率振幅の時間変化は $\hbar = h/2\pi$ として

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}A_k(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{4} \langle k|H|j\rangle A_j(t) \tag{2}$$

と書けることを示せ．ただし, $|1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|2\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$, $|3\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$, $|4\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$.

問 2. 式 (1) でパウリ行列が含まれる 3 つの項が次のように状態 $|\uparrow\uparrow\rangle$ に作用した結果, どのような状態になるかそれぞれ示せ．

$$\sigma_x^{\mathrm{e}}\sigma_x^{\mathrm{p}}|\uparrow\uparrow\rangle,\ \sigma_y^{\mathrm{e}}\sigma_y^{\mathrm{p}}|\uparrow\uparrow\rangle,\ \sigma_z^{\mathrm{e}}\sigma_z^{\mathrm{p}}|\uparrow\uparrow\rangle.$$

問 3. 式 (1) で $E_0 = 0$ とおき, 前問で得られた結果などを用いると $H_{kj} = \langle k|H|j\rangle$ が次のような行列で表されることがわかる．

$$H_{kj} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 2C & 0 \\ 0 & 2C & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

方程式 (2) を満たす確率振幅は $A_j(t) = a_j \exp(-iEt/\hbar)$ (a_j は定数, E は固有値) という形をとる．

(a) 固有値が $E = C$ および $E = -3C$ となることを示し, それぞれの固有状態を求めよ．

(b) 陽子と電子のスピンが揃った状態からスピンが反平行な状態に遷移したときに出る光子の波長は 21 cm である．C の値はいくらか．

問 4. 陽子と電子の平均距離を R としたとき C を上に挙げた物理定数を用いて表せ．

[天文学 1]

銀河系中心のごく近くを公転する分子雲が電波望遠鏡を使って発見された．この分子雲が安定に存在できる条件を求めたい．簡単のために，下図のように銀河系中心（質量 M_{GC}）と分子雲（質量 M_{MC}）が共通重心 C の周りを，円軌道を描いて角速度 ω で公転して，その分子雲の公転周期と自転周期は等しいとする (自転と公転が同期している)．銀河系中心と分子雲の間の距離を R, 共通重心と分子雲の間の距離を r_c とする．また分子雲は半径 r の球形で密度は一様であるとする．分子雲表面にある点 P は公転面にあり，その座標を (r, θ) とする．ただし，表面のみを考えて乱流や圧力の寄与は無視してよい．次の問いに答えよ．ただし，必要ならば以下の数値を用いてよい．
万有引力定数 $G = 6.7 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2},
銀河系中心の質量 $M_{\mathrm{GC}} = 4.0 \times 10^6 M_\odot$, 太陽の質量 $M_\odot = 2.0 \times 10^{30}$ kg,
原子質量単位 $u = 1.7 \times 10^{-27}$ kg, 分子ガスの平均分子量 $\mu = 2.3$

問 1. 点 P での分子雲の重力によるポテンシャル U_{MC} を求めよ．

問 2. 点 P での銀河系中心の重力によるポテンシャル U_{GC} を求めよ．ただし、U_{GC} を r/R で級数展開して，2 次の項まで で表せ．

問 3. 分子雲の質量 M_{MC} が銀河系中心の質量 M_{GC} に比べて非常に小さいとし ($M_{\mathrm{MC}} \ll M_{\mathrm{GC}}$), 公転角速度 ω を M_{GC}, R を用いて表せ．

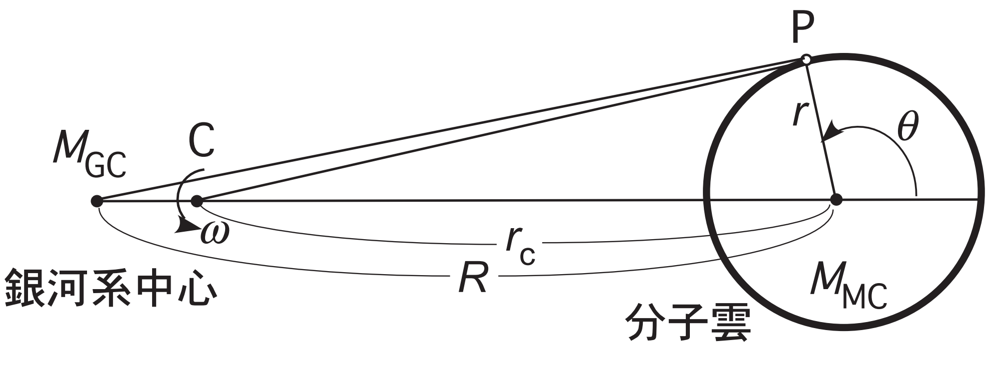
問 4. 点 P が公転していることによる遠心力のポテンシャル U_{centri} を求めよ．$M_{\mathrm{MC}} \ll M_{\mathrm{GC}}$ であることを使って，M_{GC}, r, R, θ を用いて表せ．

問 5. 以上を使って，点 P での有効ポテンシャル U を M_{GC}, M_{MC}, r, R, θ を用いて表せ．

問 6. 点 P においた質点に加わる力の分子雲の r 方向，θ 方向の 2 成分を求めよ．

問 7. この分子雲が重力的に束縛されている条件を求めよ．

問 8. 問 7 の条件のときの $R = 1 \times 10^{16}$m での分子ガスの個数密度 [m^{-3}] の下限値を求めよ (有効数字は 1 桁でよい).



[天文学 2]

励起状態にある水素原子からのスペクトル線について, 以下の問いに答えよ. プランク定数を h, ボルツマン定数を k, 光速度を c, 電子の質量を m_e, 素電荷を e, リュードベリ定数を R_∞, 真空の誘電率を ε_0 で表すものとする. また, 数値解を求める際には必要に応じ以下の数値を用いてよい.
$k = 1.4 \times 10^{-23}$ J K^{-1}, $c = 3.0 \times 10^8$ m s^{-1}, 水素原子の質量 $m_\mathrm{H} = 1.7 \times 10^{-27}$ kg, $\ln 2 = 0.69$.

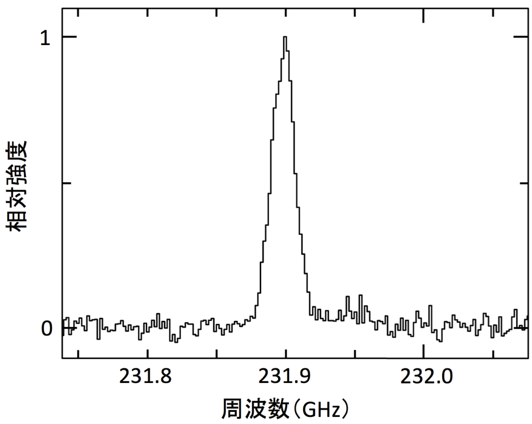
問 1. 励起状態にある水素原子からのスペクトル線の遷移周波数を以下の手順で導出しよう.

(a) 主量子数が n のエネルギー準位に存在する電子軌道の半径 r_n を n, m_e, e, h を用いて表せ.

(b) 主量子数 $n + \Delta n$ から n へ電子が遷移するとき, そのエネルギー差 ΔE に応じて放射される電磁波の周波数 ν を m_e, e, h, n, Δn を用いて表せ.

(c) 電波領域では, $\Delta n \ll n$ なるスペクトル線が強く観測される. このスペクトル線の周波数を, R_∞, c, n, Δn を用いて表せ.

(d) 下記の図は天の川銀河内に存在する H II 領域の分光観測で得られたミリ波帯スペクトルである. 天体の静止系での周波数 231.9 GHz 付近に観測された輝線は水素原子からの α 遷移 ($n + 1$ から n への遷移) である. このときの遷移後の主量子数を有効数字 1 桁で推定せよ. ここではリュードベリ定数を $R_\infty = 1 \times 10^7$ m^{-1} とせよ.



問 2. 次に, このスペクトル線の線幅について考察する.

(a) 励起状態にある水素原子を双極子モーメント er_n を持つ電気双極子と考えて, この電気双極子が単位時間あたりに放射する電磁波のエネルギー (パワー) の時間平均 $\langle P \rangle$ を e, c, ν, r_n, ε_0 を用いて表せ. 但し, 加速度 a で運動する荷電粒子 (電荷 q) が放射するパワー P についての下記の式を用いてよい.

$$P = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 a^2}{c^3} \tag{1}$$

(b) 主量子数 $n{+}1$ から n へ電子が遷移する際のスペクトル線における遷移確率 A 係数 ($A_{n+1,n}$) を r_n, R_∞, e, h, n, ε_0 を用いて表せ.

(c) この遷移確率により決まる輝線の周波数幅 (自然幅) のオーダーを見積もれ. ただし, ここでは $A_{n+1,n} \sim 5 \times 10^9 n^{-5}$ s^{-1} を用いてよい.

(d) 温度 T で質量 M の粒子の速度分布がマクスウェル分布で記述される場合に, 熱的な運動で決まる輝線の半値幅（半値全幅）を T, M, c, k, および輝線の中心周波数 ν_0 を用いて表せ. なお, 視線速度 v_r のマクスウェル分布は以下のように記述される.

$$f(v_r)\mathrm{d}v_r = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M{v_r}^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v_r \tag{2}$$

(e) 励起状態にある水素原子の 231.9 GHz にあるスペクトル線において, 熱的な運動から期待される線幅を有効数字 1 桁で見積もれ. ただし, 温度は $T = 6400$ K とせよ.

(f) 上図に示されたスペクトル線の線幅を決めている主な要因を一つ挙げ, その理由を簡潔に述べよ.