

受験番号	
氏名	

平成 29 年度大学院理学系研究科天文学専攻

修士課程入学試験問題

専 門 科 目

平成 28 年 8 月 23 日 (火)

13 時 30 分-17 時 30 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない。
2. 問題冊子は、この表紙を含めて全部で 13 ページである。
3. 答案用紙は、各問につき 1 枚、合計 4 枚配布してある。確実に配布されていることを確かめよ。
4. 問題は数学 2 問、物理学 2 問、天文学 2 問の計 6 問ある。このうちから、数学と物理学のそれぞれ少なくとも 1 問を含む 4 問を選んで解答せよ。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ。
6. 各答案用紙の所定欄に、問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ。問題番号は、数学 1、物理学 2、天文学 1 などのように、科目と番号で記入せよ。
7. 解答は、各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ。必要なら裏ページを使用してもよい。
8. 解答できない場合でも、4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入して提出せよ。
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが、足りなくなった場合は手を挙げて請求すること。
10. 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない。

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学 1]

特殊関数に関する以下の問いに答えよ。答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること。

問1. ガンマ関数は

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1)$$

と定義される。ここで x は正の実数である。

(a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ であることを示せ。

(b) n が正の整数のとき、 $\Gamma(n+1) = n!$ であることを示せ。

問2. ベータ関数は

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2)$$

と定義される。ここで x, y は正の実数である。また、ベータ関数とガンマ関数の間には以下の関係が成り立っている。

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (3)$$

以下では、 m, n をゼロまたは正の整数とする。また、 $0! = 1$ とする。

(a) 積分 $I_1 = \int_{-1}^1 (1+u)^m (1-u)^n du$ を階乗を用いて表せ。

(b) 積分 $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$ をベータ関数で表せ。

(c) (b) の結果を用いて、 $\Gamma(\frac{1}{2})$ の値を求めよ。

(d) $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ を階乗 $n!, (2n)!$ を用いて表せ。

[数学 2]

離散フーリエ変換に関する以下の問いに答えよ. 答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること.

長さ N の数列 $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ が与えられたとき, その離散フーリエ変換は,

$$F_k(\vec{x}) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi ijk/N} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (1)$$

で与えられる. ここで, i は虚数単位である ($i^2 = -1$). 以下では, \vec{x} が実数列で, $N = 2^n$ (n は正またはゼロの整数) の場合を考える.

問1. 式(1)において,

$$\begin{cases} F_0(\vec{x})^* = F_0(\vec{x}) \\ F_k(\vec{x})^* = F_{N-k}(\vec{x}) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \end{cases} \quad (2)$$

を示せ. ただし, ここで $F_k(\vec{x})^*$ は $F_k(\vec{x})$ の複素共役である.

問2. $N \geq 2$ の場合に, $N' = N/2$ とする. 式(1)において, 数列 \vec{x} の奇数番めの要素 $(x_0, x_2, \dots, x_{N-2})$ だけを取り出した長さ N' の数列を $\vec{x}^O = (x_0^O, x_1^O, \dots, x_{N'-1}^O)$ と定義する. 同様に, 偶数番めの要素 $(x_1, x_3, \dots, x_{N-1})$ だけを取り出した数列を $\vec{x}^E = (x_0^E, x_1^E, \dots, x_{N'-1}^E)$ と定義する. ここでは, \vec{x} の離散フーリエ変換が, \vec{x}^O と \vec{x}^E の離散フーリエ変換を用いて表されることを見てみよう.

(a) 式(1)を

$$F_k(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{N'-1} x_j^O e^{2\pi ijk/N'} + e^{\pi ik/N'} \sum_{j=0}^{N'-1} x_j^E e^{2\pi ijk/N'} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (3)$$

と書けることを示せ.

(b) 式(3)において, 添字 k が 0 から $N'-1$ の場合と, N' から $N-1$ の場合を分けて, 前者は,

$$F_{k'}(\vec{x}) = F_{k'}(\vec{x}^O) + e^{\pi ik'/N'} F_{k'}(\vec{x}^E) \quad (k' = 0, 1, \dots, N'-1) \quad (4)$$

後者は,

$$F_{N'+k'}(\vec{x}) = F_{k'}(\vec{x}^O) - e^{\pi ik'/N'} F_{k'}(\vec{x}^E) \quad (k' = 0, 1, \dots, N'-1) \quad (5)$$

と書き直せることを示せ.

問3. 前問で得られた \vec{x}^O, \vec{x}^E の要素を順に並べて, $(\vec{x}^O, \vec{x}^E) \equiv (x_0^O, \dots, x_{N'-1}^O, x_0^E, \dots, x_{N'-1}^E)$ という長さ N の数列を定義できる. これを第一段階とする. さらに, $N'' = N'/2$ とする. 同じ要領で, 数列 \vec{x}^O の奇数番めの要素だけを取り出した長さ N'' の数列を \vec{x}^{OO} , 偶数番めの要素だけを取り出した長さ N'' の数列を \vec{x}^{OE} と定義する. 同様に, 数列 \vec{x}^E から $\vec{x}^{EO}, \vec{x}^{EE}$ が作られる. これらを並べた $(\vec{x}^{OO}, \vec{x}^{OE}, \vec{x}^{EO}, \vec{x}^{EE})$ は, やはり長さ N の数列である. これを第二段階とする.

(a) この段階を再帰的に繰り返していくと, やがて, 新たに抜き出された数列の長さが 1 となる. これを並べたものは, 元の数列の要素を並び替えた長さ N の数列である. 長さ $N = 2^n$ の数列に対してこの並び替えを行うには, 全部で何段階の操作が必要か, 答えよ.

(b) $N = 8$ とする. 数列 $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ を, 上記の方法に従い, 新たに抜き出す数列の長さが 1 になるまで並べ替えよ.

- (c) $N = 8$ の場合, 並び替え前の添字 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ を二進数で表すと, $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$ となる. (b) での並び替え後の数列の添字を二進数で表し, 並び替え前の添字と比較してその対応関係を述べよ.

問 4. 問 2 で見たように, \vec{x} の離散フーリエ変換は, \vec{x}^O と \vec{x}^E の離散フーリエ変換で書ける. これを再帰的に繰り返せば, 最終的に長さ $N = 2^n$ の数列 \vec{x} の離散フーリエ変換 $F_k(\vec{x})$ は長さ 1 の数列の離散フーリエ変換で書けることになる.

- (a) 長さ 1 の数列の離散フーリエ変換はどのようなものであるか, 答えよ.
(b) $N = 4$ の場合, 離散フーリエ変換 $F_0(\vec{x}), F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x})$ を $F_0(\vec{x}^O), F_1(\vec{x}^O), F_0(\vec{x}^E), F_1(\vec{x}^E)$ で表せ.
(c) さらに, $F_0(\vec{x}^O), F_1(\vec{x}^O), F_0(\vec{x}^E), F_1(\vec{x}^E)$ を, x_0, x_1, x_2, x_3 で表せ.

問 5. 十分大きな N に対して, 離散フーリエ変換を求めるのに必要な計算量をだまかに見積もってみよう. 簡単のために, ここでは乗算に必要な計算量は無視し, 加算または減算の計算量だけを考える. 式 (1) に従って計算する場合, すべての k に対して $F_k(\vec{x})$ を求めるために $N(N-1) \approx N^2$ 回の加算が必要になることがわかる.

- (a) 再帰的に 2 分割していく上記の方法で計算した場合, 何回の加算または減算が必要になるか, 概数を答えよ.
(b) $N = 1024$ のとき, この再帰的な計算方法を用いると, 式 (1) に従って計算する場合に比べて計算量をどのくらい減らすことができるか, 答えよ.

[物理学 1]

誘電体に入射する電磁波に関する以下の問いに答えよ。答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること。

問 1. 図 1 のように屈折率 n_1 の媒質 1 から屈折率 n_2 の媒質 2 に入射する平面波を考える。この平面波は直線偏光しており、その電場は図の紙面に対して垂直であるとする。入射する電場の振幅を e_i 、反射した電場の振幅を e_r 、透過した電場の振幅を e_t とすると、電場の反射係数 r_{12} および透過係数 t_{12} はそれぞれ、

$$r_{12} \equiv \frac{e_r}{e_i} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (1)$$

$$t_{12} \equiv \frac{e_t}{e_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (2)$$

となる。ここで θ_1, θ_2 はそれぞれ入射波、透過波の伝搬方向の角度である (図 1 参照)。この時、

$$r_{12} = -r_{21} \quad (3)$$

$$t_{12}t_{21} + r_{12}^2 = 1 \quad (4)$$

であることを示せ。ただし、 r_{21}, t_{21} は媒質 2 から媒質 1 へ入射した場合の係数である。

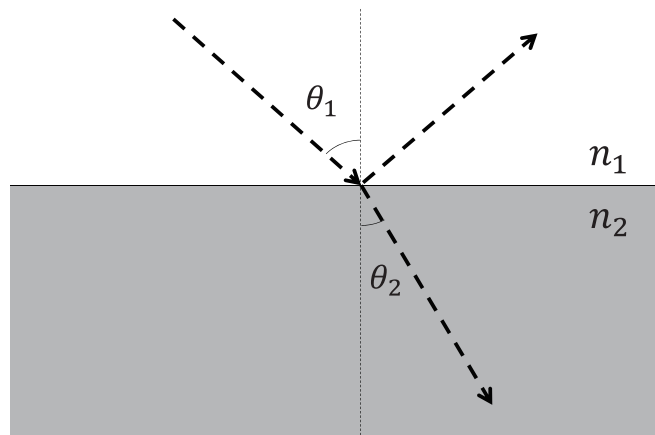


図 1

問2. 次に, 真空中に置かれた一定の厚さ d , 屈折率 n , 表面が平面である誘電体に問1と同様に直線偏光した波長 λ の平面波が入射することを考える. この時, 波は内部で多重反射して反射波と透過波をつくり, 互いに干渉して波長依存性を持った透過率・反射率を示す.

いま図2のように, ある場所に入射した波 L に注目し, それが内部で $2m$ 回反射して反対側に透過した波を L_m とする. ここで, L の電場の振幅を e_i , 誘電体に入射したあとの角度を θ とする.

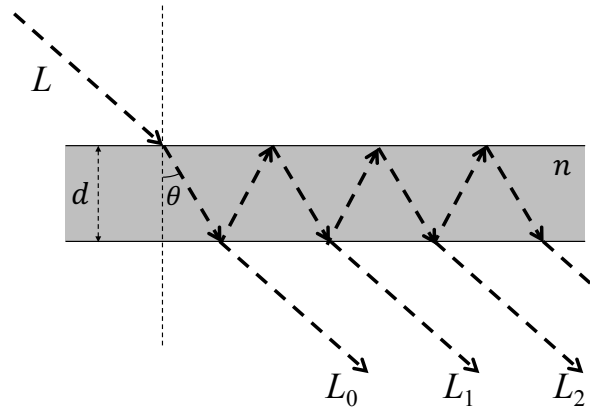


図2

- (a) このとき, L_m と L_{m+1} の位相差 ϕ を求めよ.
- (b) L_m の電場の振幅 e_m を e_i, r を用いて表せ. ただし, r は薄膜に平面波が入射する際の電場の反射係数である.
- (c) 透過した平面波の電場は, あらゆる L_m の電場の重ね合わせであると考えることができる. このとき, 透過平面波の電場の振幅 e_t は,

$$e_t = e_i \left| \frac{1 - r^2}{1 - r^2 \exp(i\phi)} \right| \quad (5)$$

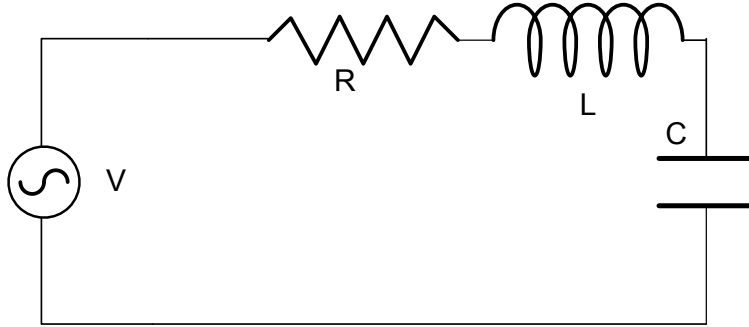
と書けることを示せ. ここで i は虚数単位である.

- (d) 入射波に対する透過波の強度比 T を r, ϕ を用い, 虚数単位 i を用いずに求めよ.
- (e) T が最大となる条件とその最大値, および T が最小になる条件とその最小値を求めよ.
- (f) このように, 2つの反射面を平行に配置することで特定の波長の光を選択的に透過させる干渉計を作ることができ, ファブリペロー干渉計と呼ばれている. ファブリペロー干渉計を製造する際に, 反射面に要求される性能で重要と考えられるものを一つ, 理由とともに述べよ.

[物理学 2]

電気回路に関する以下の問いに答えよ。答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること。

問1. 下図のような抵抗 (抵抗値 R), コイル (インダクタンス L), コンデンサ (静電容量 C), 交流電源 (電圧 V) からなる交流回路を考える。

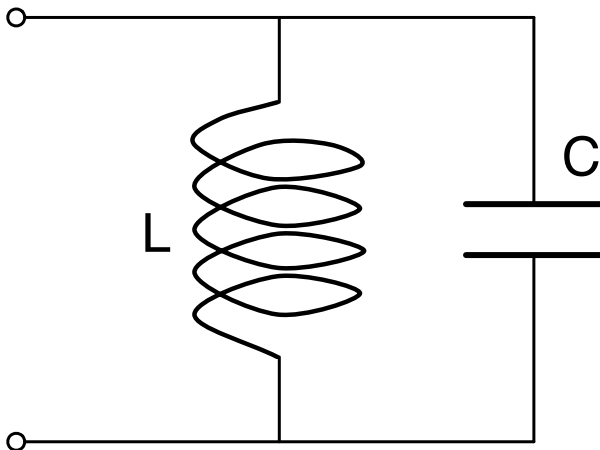


この回路の方程式は, 電荷 q , 角振動数 ω , 時間 t を用いて以下のように書ける。

$$V = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (1)$$

- (a) 電源 $V = \hat{V}e^{i\omega t}$, $q = \hat{q}e^{i\omega t}$ として, この方程式の解 \hat{q} を求めよ。ここで i は虚数単位である。さらに, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ として解を整理し, C の無い形にせよ。
- (b) $|V_C(\omega)|^2 \equiv |\hat{q}|^2/C^2 = \hat{q}\hat{q}^*/C^2$ とする。ここで $*$ は複素共役を表す。 $\omega_0 = 10 \text{ Hz}$, $R/L = 0.1 \text{ s}^{-1}$, $|\hat{V}|^2/(L^2C^2) = 1 \text{ V}^2 \text{ s}^{-4}$ である時, 横軸 ω に対して縦軸に $|V_C(\omega)|^2$ をとり, $\omega = 9 \sim 11 \text{ Hz}$ の範囲で, おおよその形を図示せよ。

問2. 次に下図のように, 単純化された交流回路が熱浴と接して温度が一定に保たれている系を考える。



この回路の全エネルギーは, コイル (インダクタンス L), コンデンサ (静電容量 C) を用いて以下のように書ける。

$$E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \quad (2)$$

ただし, 電流 $I = dq/dt$ である。以下の問いに答えよ。

- (a) ばね定数 K , 質量 m の 1 次元調和振動子のハミルトニアンは, 以下のように書ける.

$$H = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{K}{2} x^2 \quad (3)$$

この系を量子化した場合の固有エネルギー準位はプランク定数 $\hbar = h/(2\pi)$ と, 0 または正の整数 n を用いて, 以下のようになる.

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (4)$$

これをヒントにして, この回路の固有エネルギー準位 E_n をプランク定数と L と C を用いて答えよ.

- (b) この回路の絶対温度 T における分配関数 $Z(T)$ を, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ とボルツマン定数 k_B を用いて求めよ. なお, 分配関数 $Z(T)$ は, 固有エネルギー準位 E_n を用いて,

$$Z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/k_B T} \quad (5)$$

で与えられる. 和を表す \sum 記号を用いなくて回答すること.

- (c) 温度 T におけるこの回路のエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ を求めよ.
 (d) コイルに蓄えられる平均エネルギーは, 次式で表される.

$$\left\langle \frac{LI^2}{2} \right\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{4} \coth \left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \right) \quad (6)$$

ここで,

$$\coth N = \frac{\cosh N}{\sinh N} = \frac{e^N + e^{-N}}{e^N - e^{-N}} \quad (7)$$

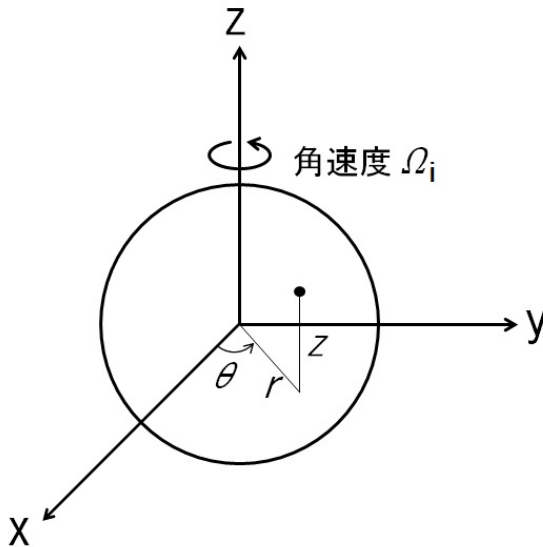
である.

量子力学の効果により, 温度 $T = 0$ K の極限においても, この回路は有限のエネルギーを持つ. この系では $\omega_0/(2\pi) = 1.5 \times 10^2$ GHz, $L = 5.0 \times 10^{-13}$ H (ヘンリー) であるとき, コイルに流れる電流の平均値 $\sqrt{\langle I^2 \rangle}$ を有効数字 2 桁で求めよ. 必要ならば, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K, $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s を用いて良い.

[天文学 1]

天体の角運動量に関する以下の問いに答えよ. 答えの導出では途中の計算過程を省略せずに記述すること.

問 1. 分子雲の中でさらに密度が高い領域は分子雲コアと呼ばれ, 星は分子雲コアが収縮して形成される. 分子雲コアの収縮について考える.



- 上の図のように, ある角速度で z 軸周りに剛体回転する一様密度の球状の分子雲コアを考える. その半径を R_i , 質量を M , 角速度を Ω_i とする. この分子雲コアの全角運動量を, 図中に示した円柱座標 (r, θ, z) を用いて求めよ.
- この分子雲コアが重力収縮する場合を考える. ただし, 簡単のため密度が一様かつ球形のまま収縮すると仮定する. この収縮において角運動量が保存する場合に, コアの半径が R の時の角速度 Ω を求めよ.
- この角速度 Ω で回転する球状コアの赤道表面の物質に働く遠心力 F_c と重力 F_g の比を, R, R_i, Ω_i, M, G を用いて表せ. なお, G は重力定数である.
- 回転する球状分子雲コアの収縮について, この比を用いてわかることを述べよ.

問 2. 次に分子雲と, そこから形成される天体の角運動量について具体的に比較する. 以下では, 角運動量の代わりに単位質量あたりの角運動量である比角運動量 (specific angular momentum) を用いる. 数値の回答には有効数字 1 桁で答え, また, 計算には以下の数値を用いても良い.

重力定数: $G = 7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$

太陽質量: $1 M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{ g}$

天文単位: $1 \text{ AU} = 2 \times 10^{13} \text{ cm}$

パーセク: $1 \text{ pc} = 3 \times 10^{18} \text{ cm}$

太陽半径: $1 R_{\odot} = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$

- (a) まず, 分子雲コアの持つ比角運動量を考える. 直径 1 pc の球形の分子雲コアが赤道表面での回転速度 0.3 km s^{-1} で回転している場合, その赤道表面の物質の持つ比角運動量を求めよ.
- (b) (a) の分子雲コアが進化して形成され则认为られる, 低質量の若い星である T タウリ型星の持つ比角運動量を考える. T タウリ型星の自転周期の典型値として 5 日 ($4 \times 10^5 \text{ s}$), 半径を $2 R_{\odot}$ とする. このとき, T タウリ型星赤道表面の物質の持つ比角運動量を求めよ.
- (c) さらに, 同じ分子雲コアから連星系が形成された場合を考える. それぞれが質量 $0.5 M_{\odot}$ を持つ 2 つの T タウリ型星が軌道長半径 100 AU の円軌道で公転している. この連星の共通重心まわりの軌道角運動量を, 比角運動量の形で求めよ.
- (d) 以上の比角運動量の比較から, 分子雲コアが収縮して星が形成される場合の角運動量保存について述べよ.

[天文学 2]

超光速現象に関する以下の問いに答えよ。答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること。

中心に巨大なブラックホールを有すると考えられている活動銀河中心核は、高速のジェットを放出しているものが数多く知られている。それらの中には見かけ上、光速を超える速度でジェットが運動して見える超光速現象を示すものがある (図 1 参照)。

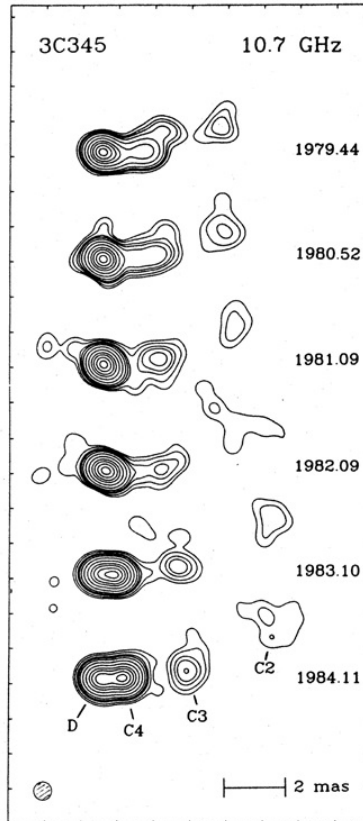


図 1. 超光速現象の観測例 (Biretta, Moore, and Cohen 1986, ApJ, 308, 93 より)

問 1. 図 2 のように、中心から速度 v 、視線方向からの角度 θ で放出されるジェットを考える。

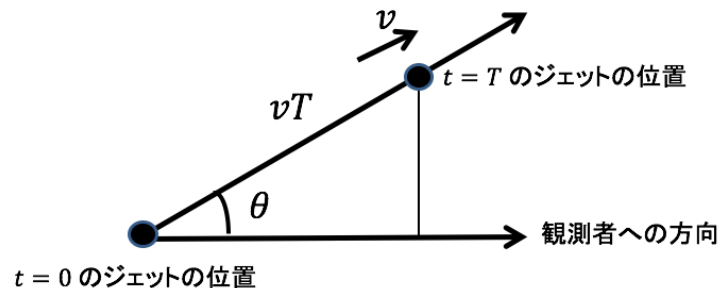


図 2. 超光速現象の模式図

- (a) ジェットの放出から時間 T だけ経過した後のジェットの見かけの位置は、 $vT \sin \theta$ だけ移動して見える。一方で観測者にとっては、ジェットが放出されてからこの見かけの位置に移動

するまでの時間は、ジェットが観測者に近づいてくる効果のために、 T より短くなる。これを考慮して、視線に垂直方向のジェットの見かけの速度 v' を、 c, v, θ で表せ。

(b) (a) で求めた速度 v' が光速より大きく見える条件を、 θ, β で表せ、ここで、 $\beta \equiv v/c$ である。

(c) (b) の条件を満たすなかで最小の v と、その時の θ を求めよ。

問2. この現象を実際に観測して、パラメータを推定することを考える。 N 回にわたって観測を行い、観測時刻 x_i におけるあるジェット成分の放出源からの離角 y_i を観測した ($i = 1, \dots, N$)。この観測値 y_i は誤差を含み、その確率分布関数は式 (1) のように、真の値 $y_{0,i}$ のまわりに標準偏差 σ_i を持つガウス分布であるとする。また、各回の観測は独立であり、系統誤差は無いものとする。

$$P(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - y_{0,i})^2}{\sigma_i^2}\right) \quad (1)$$

(a) N 回の観測によって得られる N 個の観測値、 $\{y_i\}$ ($i = 1, \dots, N$) の確率分布関数 $P_m(y_1, y_2, \dots, y_N)$ を求めよ。

(b) 真の値 $y_{0,i}$ を、 $y_{0,i} = ax_i + b$ とモデル化する。この時、前問で求められた確率分布関数を最大にする a, b を求めよ。ただし、解答に際し以下の表記を用いよ。ここで Σ は $i = 1, \dots, N$ の和を表す。

$$A = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (2)$$

$$X = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \quad (3)$$

$$Y = \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \quad (4)$$

$$P = \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \quad (5)$$

$$Q = \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \quad (6)$$

$$\Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2 \quad (7)$$

(c) ジェットの見かけの速度 a の推定精度を上げるために観測の上で重要なことを、観測の回数や期間について述べよ。

(d) パラメータ a および b の決定精度 σ_a, σ_b はそれぞれ、

$$\sigma_a^2 = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \sigma_i\right)^2 \quad (8)$$

$$\sigma_b^2 = \sum \left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_i\right)^2 \quad (9)$$

であることから、 $\sigma_a^2 = A/\Delta$, $\sigma_b^2 = P/\Delta$ となることを証明せよ。