受験番号	
氏　　名	

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

平成 30 年度修士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

平成 29 年 8 月 22 日（火）　　　13 時 30 分–17 時 30 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で 15 ページである.
3. 答案用紙は各問につき 1 枚, 計 4 枚配布してある. 確実に配布されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 2 問, 物理学 2 問, 天文学 2 問の計 6 問である. この中から, 数学と物理学のそれぞれ少なくとも 1 問を含む 4 問を選んで解答せよ.
5. 問題冊子の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ.
6. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入せよ. 問題番号は “数学 1”, “物理学 2”, “天文学 1” などのように, 科目と番号で記入せよ.
7. 解答は各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ. 必要なら裏ページを使用してもよい.
8. 解答できない場合でも, 4 枚全ての答案用紙に問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入して提出せよ.
9. 草稿用紙は別に 4 枚配布するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.
10. 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない.
11. 解答においては, 途中の計算過程を省略せずに記述すること.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学 1]

実数値関数 $J_n(x)$ が次のような展開式を満たすとする．

$$e^{\frac{x}{2}(\omega-\frac{1}{\omega})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,\omega^n \tag{1}$$

ここで，x は実数, ω は複素数 ($\omega \neq 0$)，n は整数とする．以下の問 1〜5 に答えよ．

問 1. $J_n(-x)$ を $J_n(x)$ を用いて表せ.

問 2. 式 (1) を x に関して偏微分することにより，次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{1}{2}\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\} \tag{2}$$

問 3. 式 (1) を ω に関して偏微分することにより，次式が成り立つことを示せ．

$$x\{J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\} = 2nJ_n(x) \tag{3}$$

問 4. 式 (1) で，$\omega = e^{i\theta}$ (i は虚数単位，θ は実数）とおくことにより，次式が成り立つことを示せ．

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,e^{in\theta} \tag{4}$$

さらに, 式 (4) を用いて，次式が成り立つことを示せ．

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta \tag{5}$$

問 5. 式 (4) を用いて，次式が成り立つことを示せ．

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos(2m\theta) \tag{6}$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(x)\sin\{(2m-1)\theta\} \tag{7}$$

ここで，m は正の整数とする．また，$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ が成り立つことを用いてよい．

[数学 2]

$P(x,y), Q(x,y), R(x,y,u)$ は与えられた関数とし, $u(x,y)$ に対する次の形の 1 階偏微分方程式

$$P(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = R(x,y,u) \tag{1}$$

に関する次の問いに答えよ.

問 1. x, y を新しい変数 τ の関数として次の連立常微分方程式を考える.

$$\frac{dx}{d\tau} = P, \ \frac{dy}{d\tau} = Q \tag{2}$$

この方程式を満たす xy 平面上の軌跡に沿った微分 $\frac{du}{d\tau}$ を計算することにより,

$$\frac{du}{R} = \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \tag{3}$$

であることを示せ. 式 (3) は式 (1) の偏微分方程式の補助方程式と呼ばれ, これを解くことにより式 (1) の偏微分方程式の解が得られる.

問 2. 式 (3) を用いて次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0 \tag{4}$$

の一般解を以下のようにして求めよ.　ただし, x, y に関する一階の偏微分方程式の一般解は任意関数 $f(x,y)$ を一つ含むことに注意せよ.

(a) 式 $dx/P = dy/Q$ を積分し, xy 平面上の軌跡を積分定数 C_1 を含む形で求めよ. さらに, $C_1 = h(x,y)$ と書いた時の関数 $h(x,y)$ を求めよ.

(b) 式 $du/R = dx/P$ を (a) で求めた軌跡上で積分し, その積分定数を C_2 として $u(x,y)$ を求めよ.

(c) (a) の $h(x,y)$ を変数とする任意関数 $f(h)$ を考える. (b) の $u(x,y)$ に含まれる C_2 をこの $f(h)$ で置き換えた関数 $u_2(x,y)$ が, 式 (4) の解となっていることを確かめよ. この $u_2(x,y)$ は任意関数を一つ含み, この偏微分方程式の一般解となっている.

問 3. 問 2 を参考にして, 以下の方程式を解き $u(x,y)$ の一般解を求めよ.

(a)

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(b)

$$2y\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x$$

(c)

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

[物理学 1]

原子核が陽子を散乱する現象について以下の問いに答えよ．原子核と陽子の質量をそれぞれ M と m, 電荷を Ze と e とする．$M \gg m$ であり, 原子核の運動は無視してよい．ここでは, 真空中における散乱を考え, 真空の誘電率を ϵ_0 とするとき, $4\pi\epsilon_0 \equiv 1$ となる単位系を用いよ．

問 1. 図 1 のように, 原子核の近くに向けて, 無限遠から陽子が初速度 $\mathbf{v_0}$ ($v_0 \equiv |\mathbf{v_0}|$) で入射することを考える．無限遠にある陽子から初速度の方向に伸ばした直線を A とし, これと平行に原子核から伸ばした直線を B とする．このとき, A と B の間の距離を b とする．

(a) 原子核と陽子の間の距離を r とし, 陽子の速さを v とする．v を r, m, Z, e, v_0 を用いて表せ．

(b) 原子核の位置を原点とした極座標 (r, θ) を考える．ここで, 陽子の初速度の方向を $\theta = 0$ とする．r と θ, 及びそれらの時間微分 $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ を用いて v を表せ．

(c) 電子の角運動量が保存されることから, $\dot{\theta}$ を v_0, b, r を用いて表せ．

(d) $u = 1/r$ とおくとき, $\dot{\theta}$ を v_0, b, u で表せ．次に, $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\,\dot{\theta}$ であることから, $\dot{r}$ を v_0, b, $\frac{du}{d\theta}$ を用いて表せ．さらに, $\frac{du}{d\theta}$ を m, Z, e, v_0, b, u を用いて表せ．

(e) 前問で得られた $\frac{du}{d\theta}$ を積分すると,

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{u+\beta}{\alpha}\right) + \kappa \tag{1}$$

が得られる．ここで κ は積分定数であり, α と β は,

$$\alpha = \beta\sqrt{1 + \frac{m^2 v_0^4 b^2}{Z^2 e^4}} \tag{2}$$

$$\beta = \frac{Ze^2}{m v_0^2 b^2} \tag{3}$$

で与えられる．原子核により散乱された陽子が無限遠にあるときの角度 θ を散乱角 ϕ とする（図 1）．式 (1) から (3) を用いて, ϕ を m, v_0, b, Z, e で表せ．

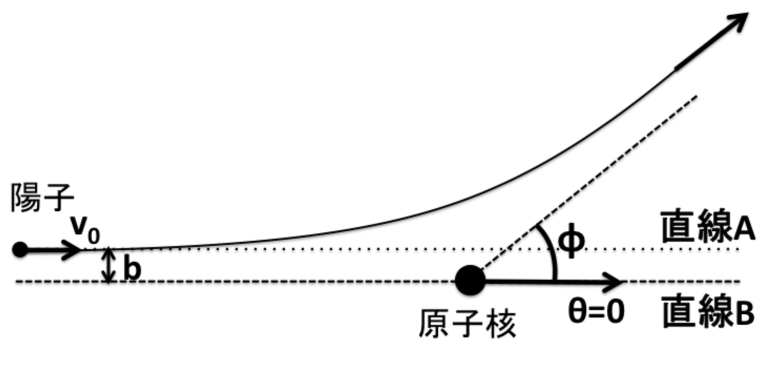


図 1: 原子核による陽子の散乱

問 2. 図 2 のように, 静止している原子核に対して, 平行な陽子線が一様なフラックス I (単位時間, 単位面積当たりの強度) で入射する散乱現象を考える. 原子核の散乱を受けた後の陽子線の単位時間, 単位立体角当たりの強度を $P(\phi)$ とする.

(a) 入射陽子線に対して垂直な平面 S を考える. 平面 S は原子核から十分に離れた位置にあるものとする. 原子核からこの平面 S に下ろした垂線の足を点 O とする. 平面 S 上に, 点 O を中心とする半径 b, 幅 db の円環を考える. 円環内を通る陽子線が, 原子核による散乱を受け, 散乱角 ϕ と $\phi + d\phi$ の間を通り抜けるとき, $P(\phi)$ を I, b, ϕ, $\frac{db}{d\phi}$ を用いて示せ.

(b) 問 1 の結果も利用して $P(\phi)$ を求めると, $P(\phi) = C \sin^n(\phi/2)$ という形になる. ここで, C は ϕ によらない定数である. このときの n の値を答えよ.

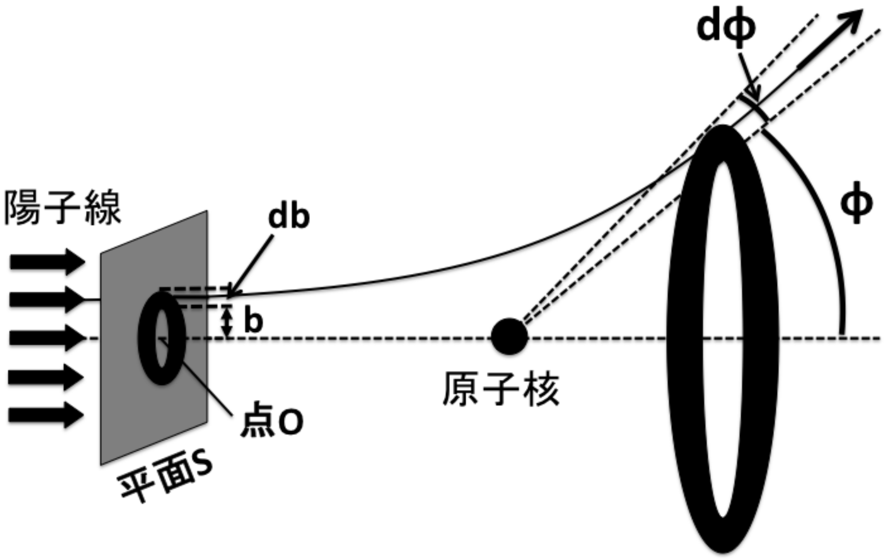
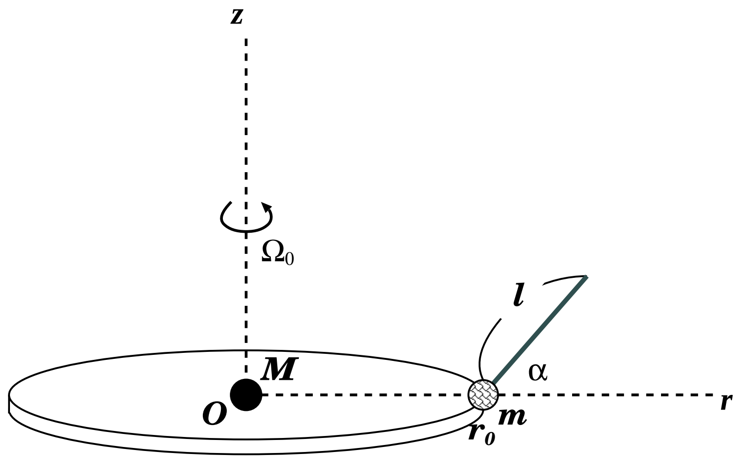


図 2: 原子核による平行陽子線の散乱

[物理学 2]

図のように原点に質量 M を持つ物体を置き, この物体を中心として半径 r_0 の薄く質量の無視できる円盤を設置する. この円盤平面に垂直な軸を z 軸とし, 円盤平面内に動径座標 r を取る. 質量の無視できる長さ l の棒を円盤の縁の 1 点に取りつける. この時, 棒と z 軸が同一平面内にあるようにし, かつ, 棒と円盤平面とのなす角が α となるように固定する. さらにこの棒に, 大きさの無視できる質量 m のビーズを通し, 円盤と棒を含む系全体を一定の角速度 Ω_0 で方位角 (ϕ) 方向に回転させる. Ω_0 は, ビーズが棒の根元, すなわち位置 $r = r_0$, $z = 0$ にある時に, 中心物体がビーズに及ぼす重力と, 回転による遠心力がつり合うように調整されている. また $m \ll M$ であり, ビーズは原点にある物体からのみ重力を受けるものとする. ビーズと棒の間には摩擦がなく, ビーズは棒に沿って滑らかに運動できるものとして, 以下の設問に答えよ. なお, 重力定数を G とせよ.



問 1. Ω_0 を求めよ.

問 2. $\alpha = 0$ とした場合を考えよう.

(a) 棒の根元にあるビーズを外向きに微小距離動かすと, 時間と共に棒に沿って外向きに移動していった. 重力と遠心力を考慮することにより, ビーズが棒上にある間 ($r_0 < r < r_0 + l$) の, ビーズの動径方向の運動方程式を示せ.

(b) 運動方程式に $\dot{r}$ を掛けて時間に関して積分することにより, ビーズが棒上にある間の保存量を求めよ.

(c) 上で求めた保存則から, ビーズが棒上にある間のビーズの動径方向の速度 v_r を, G, M, r_0, r を用いて表せ. なお, 棒の根元でのビーズの速度は 0 として良い.

(d) ビーズが棒の先端から飛び出した後のビーズの全エネルギーと角運動量を, G, M, m, l, r_0 を用いて表せ.

(e) 棒の先端から飛び出したビーズが無限遠に到達するために, l が満たすべき条件を求めよ.

(f) ビーズが棒の先端から飛び出した後の, 動径位置 r におけるビーズの方位角方向速度 v_ϕ を, G, M, l, r_0, r を用いて表せ.

問 3. 次に $0 < \alpha < \pi/2$ の場合を考える.

(a) 棒と z 軸が含まれる平面内において, ビーズが棒から受ける垂直抗力を F_{N} とする．ビーズが棒上にある間の, ビーズの運動方程式の r 成分と z 成分を，G, M, m, F_{N}, α, r_0, r, z を用いて書き下せ.

(b) 棒の根元を $x = 0$ とし, 棒に沿って x 座標を取る．この時, r と z を α, r_0, x で表せ.

(c) (a) で求めた r, z 各成分の運動方程式から F_{N} を消去することにより, 棒に沿った方向の運動方程式を求めよ．解答には, G, M, m, α, r_0, および (b) で設定した x を用いよ.

(d) 棒の根元にあるビーズを棒に沿って外向きに微小距離動かした時に, ビーズが棒に沿ってすべり上がるために, α が満たすべき条件を求めよ.

[天文学 1]

一酸化炭素 (^{12}C^{16}O) の振動回転エネルギー準位は, 振動量子数 v, 回転量子数 J によって量子化され (v, J は 0 以上の整数), $v \lesssim 10, J \lesssim 100$ の範囲で近似的に次の式で表せる.

$$E(v,J) = h\nu_e\left(v+\frac{1}{2}\right) - h\nu_e x_e\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + hB_eJ(J+1) - hD_eJ^2(J+1)^2 - h\alpha_e\left(v+\frac{1}{2}\right)J(J+1)$$

ここで, プランク定数 $h = 6.626\times10^{-34}$ J s, 光速 $c = 2.998\times10^8$ m/s, その他の諸定数 $\nu_e = 6.505\times10^{13}$ Hz, $\nu_e x_e = 3.986\times10^{11}$ Hz, $B_e = 5.790\times10^{10}$ Hz, $D_e = 1.835\times10^5$ Hz, $\alpha_e = 5.257\times10^8$ Hz とする.

振動量子数 v については, $\Delta v = 0, \pm1, \pm2, ...$ の遷移が可能であり, 一方, 回転量子数 J については, $\Delta J = \pm1$ の選択則に従っての遷移が可能である. 遷移において, エネルギーの高いレベルの回転量子数を $J_{\rm U}$, エネルギーの低いレベルの回転量子数を $J_{\rm L}$ とする時, 振動回転遷移において, $J_{\rm U} - J_{\rm L} = -1$ の遷移を P ブランチ, $J_{\rm U} - J_{\rm L} = +1$ の遷移を R ブランチと呼ぶ. 以下の問いに答えよ.

問 1. 純回転遷移 ($v = 0 \to 0, J = J_{\rm U} \to J_{\rm L}$, ただし $J_{\rm U} = J_{\rm L} + 1$) の場合に放射される光子のエネルギー $\Delta E(J_{\rm L})$ を求めよ. ここで, $\Delta E(J_{\rm L})$ の式においては, 上記の諸定数の数値を代入する必要はない. さらに, $(v, J) = (0, 3) \to (0, 2)$ の遷移で放射される光子の波長を有効数字 3 桁で求めよ. この波長は何と呼ばれる電磁波領域か答えよ.

問 2. 振動回転遷移 ($v = 2 \to 0, J = J_{\rm U} \to J_{\rm L}$, ただし $J_{\rm U} = J_{\rm L} + 1$) の場合に放射される光子のエネルギー $\Delta E(J_{\rm L})$ を求めよ. ここで, $\Delta E(J_{\rm L})$ の式においては, 上記の諸定数の数値を代入する必要はない. さらに, $(v, J) = (2, 1) \to (0, 0)$ の遷移で放射される光子の波長を有効数字 3 桁で求めよ. この波長は何と呼ばれる電磁波領域か答えよ.

問 3. 上記の $v = 2 \to 0$ の場合を例として, 振動回転遷移の R ブランチにおいて, $0 \le J_{\rm L} \lesssim 100$ の範囲における放射光子の波長変化の振舞いを示せ. この R ブランチに特徴的な波長変化の振舞いをバンドヘッドと呼ぶ.

[天文学 2]

天体までの距離に関する以下の問いに答えよ．なお，光速度 c は 3.0×10^5 km/s, $\log_{10} 2 = 0.30$ としてよい．

問 1. 図 1 は星団 A（距離 50 pc）と星団 B（距離不明）に属するセファイド型変光星の変光周期と見かけの明るさの関係を示した図である．星団 B までの距離（pc）を有効数字 1 桁で求めよ．

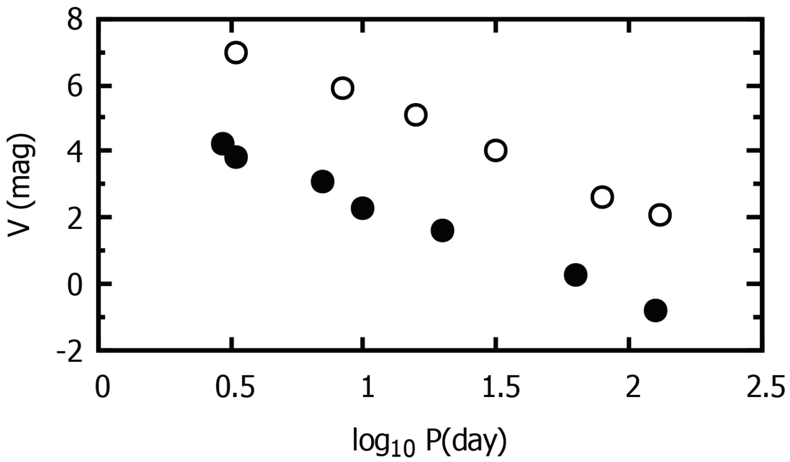


図 1: 星団 A（●印）および星団 B(○印）に属するセファイド型変光星の変光周期 P（日）と見かけの明るさ V(等級)

問 2. 天体の光度を L, 光度距離を d_L とするとき，見かけの明るさ F は

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \tag{1}$$

と表せる．ただしここでは簡単のため天体の明るさ L は波長によらないものとする．以下の問 (a), (b) に答えよ．

(a) 見かけの等級を $m = -2.5 \log_{10} F + C$ とする．ここで C は定数である．また絶対等級 (10 pc での天体の見かけの等級) を M とするとき，m を M, d_L で表せ．ただし d_L の単位を Mpc とする．

(b) ある型の超新星の最大光度と赤方偏移 z の関係を図 2 に示した．この型の超新星の最大光度は絶対等級で -19.3 であるとき，この図からハッブル定数 H_0（現在の時刻での宇宙の膨張の割合）を，$\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ の単位で有効数字 1 桁で求めよ．ただし赤方偏移 z は宇宙膨張によって天体からの光の波長が伸びる効果で，$z \ll 1$ の場合には天体の後退速度 v は $v = cz$ と近似できる．

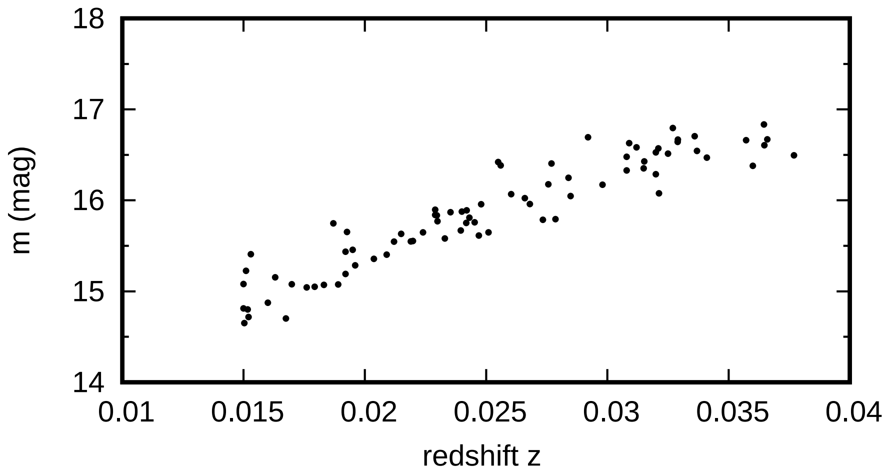


図 2: 超新星の赤方偏移 z と見かけの明るさ m（等級）

問 3. 十分大きなスケールでみた場合に一様等方とみなせる宇宙において, 宇宙膨張を考慮した天体の距離について考察する. 赤方偏移 z の天体から届く光は, 静止系での波長を λ_{rest}, 観測波長を λ_{obs} とすると, 宇宙膨張の効果により $\lambda_{\mathrm{obs}}/\lambda_{\mathrm{rest}} = 1 + z$ と波長が伸びる. このとき宇宙の大きさは, 天体から光が出て観測者に届くまでに, スケールファクター $a = (1 + z)^{-1}$ に比例した膨張をしている. ただし現在の時刻でのスケールファクターを 1 とする.

宇宙のエネルギー密度を ρ, 重力定数を G, $\dot{a}$ を a の時間微分とするとき, 宇宙膨張は以下の式で記述できる.

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \tag{2}$$

ここで H はハッブルパラメータと呼ばれ, 現在の宇宙時刻 $t = t_0$ ではハッブル定数 H_0 である. ただし簡単のため曲率および宇宙項はゼロとしている. このとき, 以下の問 (a)〜(g) に答えよ.

(a) 宇宙の臨界密度を

$$\rho_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \tag{3}$$

と定義し, 密度パラメータ Ω を臨界密度で規格化した密度 $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ と定義する. この時, H^2 を Ω と H_0 を使って表せ. また, 現在の時刻での Ω を Ω_0 とする時, Ω_0 の値を答えよ.

(b) 物質のみからなる宇宙の場合, Ω を a を用いて表せ. ただし物質の圧力は無視できるものとする.

(c) (b) の場合において, a を時間 t の関数として示せ. ただし $t = 0$ で $a = 0$ とする.

(d) 光度距離 $d_L(z)$ は,

$$d_L(z) = (1 + z) \int_0^z \frac{c}{H(z')} dz' \tag{4}$$

で与えられる. (b) の場合において, $d_L(z)$ を H_0, z, c で表せ.

(e) 光子のみからなる宇宙の場合, Ω を a を用いて表せ. ただし光子の場合, 宇宙が膨張しても光子数は保存するが, 光子の波長は a に比例して増大する.

(f) (e) の場合において, 光度距離 $d_L(z)$ を H_0, z, c で表せ.

(g) (b) の宇宙の場合と (e) の宇宙の場合で, 同じ絶対光度を持つ天体が $z = 0.2$ にあるとするとき, 見かけの明るさは何%異なるか. H_0 が等しい場合について有効数字 1 桁で求めよ.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)