受験番号	
氏　　名	

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

令和 4 年度修士・博士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

令和 3 年 8 月 23 日（月）　　13 時 30 分–17 時 30 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で 13 ページである.
3. 答案用紙は各問につき 1 枚, 計 4 枚配付してある. 確実に配付されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 1 問, 物理学 2 問, 天文学 1 問の計 4 問である. 全問解答せよ.
5. 問題冊子の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ.
6. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号, 受験番号, 及び氏名を必ず記入せよ. 問題番号は “数学”, “物理学 1”,“物理学 2”, “天文学” などのように, 科目と番号で記入せよ.
7. 解答は各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ. 必要なら裏ページを使用してもよい.
8. 解答できない場合でも, 4 枚全ての答案用紙に問題番号, 受験番号, 及び氏名を必ず記入して提出せよ.
9. 草稿用紙は別に 4 枚配付するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.
10. 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない.
11. 解答においては, 途中の計算過程を省略せずに記述すること.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学]

2 つの 2 次元直交座標系 $(x,\ y)$ および $(x',\ y')$ に関する座標変換が 4 つの実数 a, b, c, d からなる 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{1}$$

という式で与えられるとき, 以下の設問に答えよ.

問 1. 2 つの直交座標系の共通の原点 O から任意の点 P までの距離がこの座標変換によって不変に保たれるとする.

(a) この座標変換が a, b, c, d に課す条件式を求めよ.

(b) これらの行列のうち $a = \cos\theta$, $d = -\cos\theta$ $(0 < \theta < 2\pi)$ と置いたときに, 行列の他の成分 b, c はどのように表されるか. 得られる全ての行列について, それぞれの成分を表せ.

(c) 前問 (b) で得られた行列はそれぞれどのような変換に対応するか. 次の括弧内の字句を用いて説明せよ. (角度, 回転, 鏡映変換, 対称軸)

問 2. 座標系 $(x,\ y)$ の y 軸が, 座標系 $(x',\ y')$ では

$$x' + \beta y' = 0, \tag{2}$$

と表され (β は 1 より小さい正の定数), 座標に対して次の関係式 (3) が満たされるとき, 以下の問いに答えよ.

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2. \tag{3}$$

(a) a, b, c, d を β で表せ. ただし $a > 0$ および $d > 0$ とする.

(b) 座標系 $(x',\ y')$ で, ベクトル $\vec{m}$ の成分が

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \tag{4}$$

のとき, 問 2(a) で求めた変換によってどのようなベクトルに変換されるか, 各成分を β, m を用いて表せ.

(c) 2 次正方行列 T とベクトル $\vec{v}$ の積 $T\vec{v}$ はベクトルになる. このことを利用して, 2 次正方行列 T' は行列 A によって

$$T = AT'A^{-1}, \tag{5}$$

のように変換されることを示せ.

(d) 2 次正方行列 T' の成分が以下のように表されるとき, 2 次正方行列 T の各成分を β, ϵ, p を用いて表せ.

$$T' = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \tag{6}$$

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[物理学 1]

質量 m_1, m_2 の 2 天体の作る重力場で運動する質量 m_3 の天体の運動を考える．天体は質点と見なせるとし, その質量で呼ぶことにする．m_1, m_2, m_3 は同一平面内を運動するとする．$m_3 \ll m_1, m_2$ とし, m_3 は m_1 と m_2 の運動に影響を与えないとする．また, m_1 と m_2 の運動は円運動とし, m_1 と m_2 の距離を a とする．図 1 に問題の概念図を示す．m_1 と m_2 の重心を O とし, 2 つの 2 次元直交座標系 (x', y'), (x, y) を考える．重力定数を G とし, 答えの導出や証明では途中の計算過程を省略せずに記述すること．

問 1. 重心 O を原点とする慣性系 (x', y') を考える。慣性系における m_1 と m_2 の位置をそれぞれ (x'_1, y'_1) と (x'_2, y'_2) とし, m_3 と m_1, m_2 の距離を r_1, r_2 とする．このとき慣性系における m_3 の運動方程式を書け．

問 2. m_1 と m_2 の円運動の回転角速度 n を G, m_1, m_2, a を使って表わせ．

問 3. 重心 O を原点, m_1 と m_2 を結ぶ線を x 軸とし, 角速度 n で回転する回転座標系 (x, y) を考える．時間を t とし, 慣性系での位置 (x', y') と回転座標系での位置 (x, y) の関係を角度 nt を用いた回転行列を使って表わせ．

問 4. 慣性系での加速度 $(\ddot{x}', \ddot{y}')$ を回転座標系での加速度 $(\ddot{x}, \ddot{y})$, 速度 $(\dot{x}, \dot{y})$, 位置 (x, y) を使って表わせ．

問 5. 回転座標系での m_3 の運動方程式を導け．ただし, x 成分, y 成分ごとに時間 t を含まない形で整理すること．

問 6. 回転座標系で運動が静止する平衡点をラグランジュ点と呼ぶ．ラグランジュ点の条件を書け．

問 7. ラグランジュ点のうち, x 軸上にない点を L_4, L_5 点と呼ぶ．L_4, L_5 点では $r_1 = r_2$ が成り立つことを示し, その点の座標を m_1, m_2, a を使って表わせ．

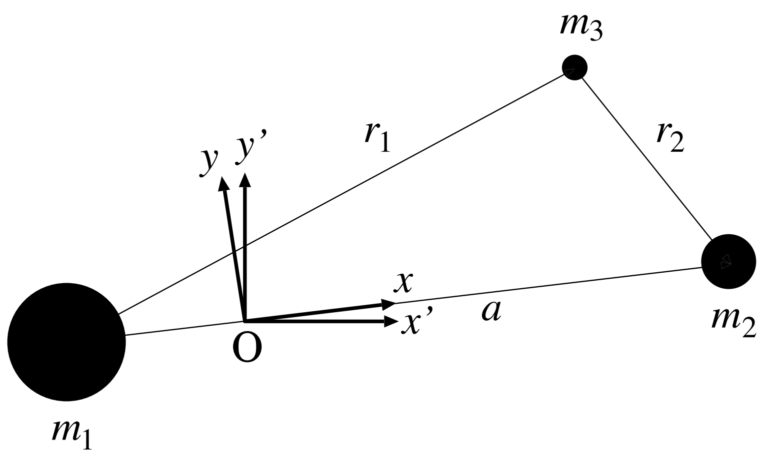

図 1: 3 天体と座標系の概念図．

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[物理学 2]

理想気体の圧力 p, 体積 V, 温度 T の間に, 状態方程式 $pV = nRT$ が成立する (n は気体のモル数, R は気体定数). 1 モルあたりの定積比熱を C_V, 定圧比熱を C_p, 比熱比を $\gamma \equiv C_p/C_V$ とする.

問 1. (a) 定積比熱 C_V と定圧比熱 C_p の間に, $C_p = C_V + R$ が成立することを示せ.

(b) 気体の質量密度 (以下, 密度とする) を ρ とする. 熱力学第一法則を用いて, 断熱変化の際の p, ρ, γ の間の関係式 (断熱条件) を導け.

(c) p, T, γ の間の断熱条件を表せ.

以下では, 重力の影響を受けて静水圧平衡にある星の大気 (理想気体とする) の安定性を考察する. 中心からの半径 r における密度, 温度, 圧力は $\rho(r), T(r), p(r)$, 半径 $r + \mathrm{d}r$ においては $\rho(r + \mathrm{d}r), T(r + \mathrm{d}r), p(r + \mathrm{d}r)$ である (図 1).

(d) ある微小流体要素を, 圧力平衡を保ちながら断熱的に $\mathrm{d}r$ だけ持ち上げたとき, 密度変化と温度変化が生じ, 新たな密度が $\rho^* = \rho(r) + (\mathrm{d}\rho)_{\mathrm{ad}}$ になったとする (図 1). 断熱条件の式を用いて, $(\mathrm{d}\rho)_{\mathrm{ad}}$ を $p, \mathrm{d}p, \rho, \gamma$ を用いて表せ.

(e) ρ^* と $\rho(r + \mathrm{d}r)$ の大小関係に注目し, 流体が安定である条件を, その理由とともに示せ.

(f) $\rho(r + \mathrm{d}r) = \rho(r) + (\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r)\mathrm{d}r$ と近似する. 安定の条件を, 大気の密度勾配 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r$ と圧力勾配 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r$ の関係式として表せ.

(g) 上記 (f) の関係式を, 圧力勾配と大気の温度勾配 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$ の関係式として書き直せ.

(h) 上記 (c) で求めた関係式を用いると, 圧力勾配 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r$ を断熱的な温度勾配 $(\mathrm{d}T/\mathrm{d}r)_{\mathrm{ad}}$ を用いて表すことができる. 安定の条件を, $(\mathrm{d}T/\mathrm{d}r)_{\mathrm{ad}}$ と大気の温度勾配 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$ の関係式として示せ.

(i) 上記 (h) の関係式が意味するところを説明せよ.

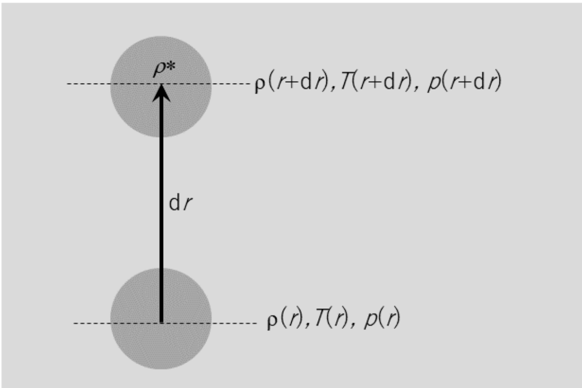

図 1: 星の大気中, 中心からの半径 r において, 微小流体要素を上向きに動かす様子. 重力は下向きに働いている.

問 2. 圧縮性流体 (理想気体とする) の定常的な一次元流を考える．質量保存則, 運動量保存則, エネルギー保存則から, 流れに沿って以下の量が保存される．

$$\rho\, v,$$

$$\rho\, v^2 + p,$$

$$\frac{1}{2}\, v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \quad .$$

ここで, v, p, ρ, γ は, それぞれ, 流体の速度, 圧力, 質量密度 (以下, 密度とする), 比熱比である．

超音速の流れによって衝撃波が発生した場合を, 衝撃波面に固定した座標系で考える．衝撃波面と垂直に上流 (図 2 の左側) から超音速 v_1 で流体が流入し, 下流 (右側) に速度 v_2 で流出する ($v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$)．このように, 上流と下流の物理量を添え字で区別する．上流の温度, 音速, マッハ数は, それぞれ, $T_1, a_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}, M_1 = v_1/a_1(> 1)$ である． 下流については, $T_2, a_2 = \sqrt{\gamma p_2/\rho_2}, M_2 = v_2/a_2$ である．

上で示した 3 つの保存式を用いると, 下流の物理量は上流の物理量のみによって決定されることが期待される．その具体的な表式を求めてみよう．

(a) $x \equiv \rho_2/\rho_1$ と定義する．質量保存則より $x = v_1/v_2$ である．$y \equiv p_2/p_1$ と定義し, 運動量保存の式とエネルギー保存の式を, それぞれ, x, y, M_1, γ の間の関係式として表せ.

(b) 上記の連立方程式を解き, x と y を, それぞれ, M_1 と γ の関数として表せ.

(c) 状態方程式を用いて, 温度比 T_2/T_1 を M_1 と γ の関数として求めよ.

(d) M_2 を M_1 と γ で表せ．この式から, 衝撃波面に超音速で流入した流体は亜音速で流出することを示せ.

(e) M_1 が十分に大きい「強い衝撃波」の極限では, 衝撃波加熱・圧縮によって下流の温度と圧力はいくらでも大きくなりうる一方, 密度比 ρ_2/ρ_1 は一定値に近づく．その一定値を γ の関数として表せ.

(f) 単原子理想気体の場合に, 「強い衝撃波」の極限で密度比が取る値を求めよ.

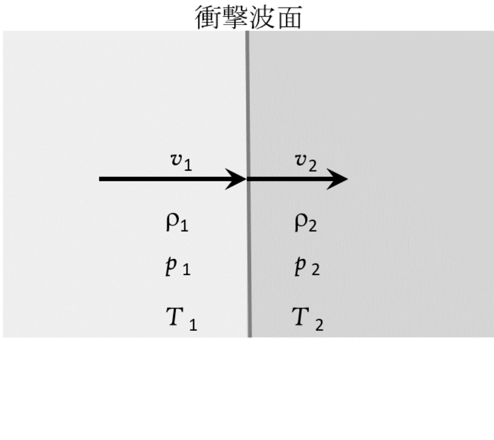

図 2: 一次元定常流の中に衝撃波が発生している様子．流体は, 図の左側 (上流) から右側 (下流) に流れている.

[天文学]

恒星には様々な元素の吸収線が見られるが, その強さは恒星表面の温度によって大きく変化する. その意味付けは, 20 世紀初頭, 当時展開されたばかりの量子論を活用したインドのサハ (Saha) による「熱励起および熱電離の理論」によって初めてもたらされた. ここでは簡単な物理モデルを使って, サハの理論を追ってみよう. 以下の問いに答えよ. なお, 問 1 および問 2 では簡単化のために, 原子の束縛状態は基底状態 (イオン化エネルギー $\chi > 0$) だけを持つものとし, 気体は全て非縮退かつ非相対論的な理想気体とする. また, ボルツマン定数を k, プランク定数を h とする.

問 1. 中性原子 X^0 に光子 γ があたって 1 階電離のイオン X^+ と自由電子 e^- に分かれる過程 (電離) とその逆過程 (再結合) が, $\mathrm{X}^0 + \gamma \rightleftharpoons \mathrm{X}^+ + \mathrm{e}^-$ のように釣り合っている電離平衡気体を考える. 初期には全ての原子は中性でその個数密度が N であったとする. 中性原子のうち電離してイオンとなったものの割合を電離度 x $(0 \le x \le 1)$ で定義し, それが温度 T についてどう変化するかを考える.

(a) 中性原子の個数密度 N_0, イオンの個数密度 N_+, および自由電子の個数密度 N_e のそれぞれを, x および N を用いて表わせ.

(b) X^0,X^+, e^- のそれぞれの化学ポテンシャルを μ_0, μ_+, μ_e とすると, 電離平衡は化学ポテンシャルの釣り合い $\mu_0 - \chi = \mu_+ + \mu_\mathrm{e}$ で記述できる. 質量 m, 状態の統計的重み g の粒子から成る個数密度 N の理想気体の化学ポテンシャルは,

$$\mu = -kT \ln \left[\frac{g}{N} \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right] \tag{1}$$

であることを用い, 電離平衡時の x と T の関係が以下の式 (サハの式) で表されることを導け. ここで, 中性原子, イオン, および自由電子のそれぞれの統計的重みは g_0, g_+, 2, 質量は m_0, m_+, m_e とし, $m_0 = m_+$ と近似して計算せよ.

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{2g_+}{g_0} \frac{(2\pi m_\mathrm{e} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{e^{-\frac{\chi}{kT}}}{N} \tag{2}$$

(c) 温度 T の上昇により電離度 x は増えるか減るか, 式 (2) に基づき理由と共に答えよ.

問 2. 次に, 電離気体中の中性原子とイオンに着目し, 異なる考え方でサハの式を導いてみよう. 温度 T の熱平衡状態では, 中性原子の個数密度 N_0 とイオンの個数密度 N_+ の比は, 中性原子, イオン, および自由電子それぞれの 1 粒子あたりの分配関数 (状態和) を Z_0, Z_+, Z_e とすると,

$$\frac{N_+}{N_0} = \frac{Z_+ Z_e}{Z_0} e^{-\frac{\chi}{kT}} \tag{3}$$

で表される. なお, 粒子が連続エネルギー状態にある場合, 1 粒子あたりの分配関数 Z は, 粒子の統計的重みを g, 1 粒子が実空間に占める体積を V, 粒子のエネルギーを E とすると, 運動量空間 (p_x, p_y, p_z) における積分 $Z = \dfrac{gV}{h^3} \iiint e^{-\frac{E}{kT}} dp_x dp_y dp_z$ で求められる.

(a) 自由電子の分配関数 Z_e を, その温度 T および個数密度 N_e の関数として求めよ. ただし自由電子の統計的重みを 2 とする. 必要であれば定積分の公式 $\int_0^\infty e^{-t^2}t^2\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ を用いてもよい.

(b) 中性原子およびイオンの分配関数をそれぞれ $Z_0 = g_0$, $Z_+ = g_+$ とし, 前問の Z_e とともに式 (3) に代入すると, サハの式 (2) になることを示せ.

問 3. 最後に, 原子の電離と励起 (図 1) の性質の違いが, 星の吸収線にどう影響するかを考えてみよう.

(a) 温度 T が上昇した場合, $kT = \chi$ に相当する温度あたりを境に, 励起状態 (電子のエネルギー準位 $n \geq 2$) にある原子の個数が基底状態 ($n = 1$) にある原子の個数に対して無視できなくなり, 励起が効き始める. 一方, 電離については,

$$kT = \frac{\chi}{\xi} \qquad (\text{ただし}\xi \equiv \ln\left[\frac{(2\pi m_\mathrm{e}kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\frac{1}{N_\mathrm{e}}\right]) \tag{4}$$

においてイオンの個数が中性原子の個数を上回り, 電離が効き始める. この転移温度の式 (4) をサハの式 (2) をもとに導出せよ. ここで, 統計的重みについては $g_0 = 2$, $g_+ = 1$ として計算せよ. この ξ は温度に対して緩やかに変化する関数で, 恒星表面の温度および密度の典型的な範囲ではおおよそ 10–30 の範囲にある定数とみなしてよい.

(b) 恒星の可視光スペクトルに最もよく見られる中性水素原子 (H) の吸収線 (バルマー系列) は, 図 1 に示されるような $n = 2$ の準位から上の準位への遷移が光を吸収して生じるため, その強度は $n = 2$ の準位にある水素原子の割合に比例する. 温度が高くなると $n = 2$ の準位への励起がより多く生じるため, 吸収線強度も単調に強くなっていくことが期待されるが, 実際には図 2 に示されるように, 10,000 K あたりでピークとなったあと高温側では急速に弱くなってしまう. その理由を, (a) を参考に述べよ. ここで, 水素のイオン化エネルギー $\chi = 13.6\,\mathrm{eV}$ に相当する温度 ($kT = \chi$) は約 160,000 K, また温度が 10,000 K 前後の星の典型的な ξ は 15 程度であることを用いよ.

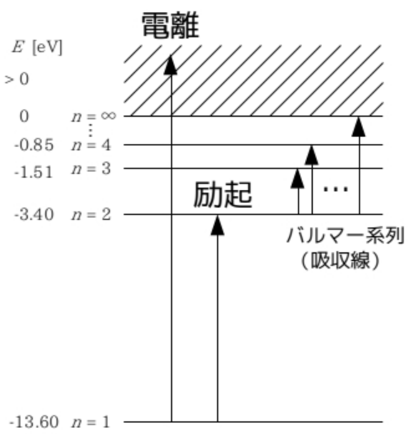

図 1: 中性水素原子 (H) の電離と励起, および可視光に見られるバルマー系列の吸収線に対応する遷移. 図中の n は原子中の電子の束縛準位, E はそのエネルギー値を示す.

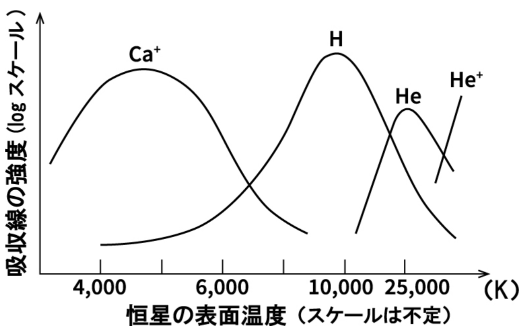

図 2: 可視光波長域の代表的な原子・イオン吸収線の強さの恒星の表面温度に対する変化. 中性水素原子 (H) の曲線が, バルマー系列の吸収線の強度変化を示している.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)