受験番号	
氏　　名	

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

令和 5 年度修士・博士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

令和 4 年 8 月 23 日（火）　　13 時 30 分–17 時 30 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で 13 ページである.
3. 答案用紙は各問につき 1 枚, 計 4 枚配付してある. 確実に配付されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 1 問, 物理学 2 問, 天文学 1 問の計 4 問である. 全問解答せよ.
5. 問題冊子の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ.
6. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号, 受験番号, 及び氏名を必ず記入せよ. 問題番号は “数学”, “物理学 1”,“物理学 2”, “天文学” などのように, 科目と番号で記入せよ.
7. 解答は各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ. 必要なら裏ページを使用してもよい.
8. 解答できない場合でも, 4 枚全ての答案用紙に問題番号, 受験番号, 及び氏名を必ず記入して提出せよ.
9. 草稿用紙は別に 4 枚配付するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.
10. 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない.
11. 解答においては, 途中の計算過程を省略せずに記述すること.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学]

以下では, 行列とベクトルの成分はすべて実数とする. 行列 A に対し, その行と列を入れ替えた行列 (転置行列) を A^T と表す. $A = A^T$ が成立するとき A を対称行列と呼ぶ. 単位行列を I とし, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を満たす A^{-1} を A の逆行列と呼ぶ. ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と表す. 一般に, B を $(m \times n)$ 行列, $\boldsymbol{a}$ を m 次元ベクトル, $\boldsymbol{b}$ を n 次元ベクトルとするとき,

$$\boldsymbol{a} \cdot B\,\boldsymbol{b} = B^T\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{1}$$

が成立することに留意して, 以下の問いに答えよ.

問 1. 行列 A に対して, $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ となる定数 λ と $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在するとき, $\lambda, \boldsymbol{u}$ を, それぞれ A の固有値, 固有ベクトルと呼ぶ. A が $(n \times n)$ 行列であれば, 最大 n 個の異なる固有値と固有ベクトルが存在する. 対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ.

問 2. A が $(n \times n)$ 対称行列で, 異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ と固有ベクトル $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ を持つとする. 固有ベクトルは長さが 1 の単位ベクトルになっているものとする. 各単位固有ベクトルを列とする $(n \times n)$ 行列 $U \equiv (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$ を定義する.

(a) U^T は U の逆行列 U^{-1} であることを示せ.

(b)

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} U^T \tag{2}$$

と表せることを示せ.

(c) 任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} > 0$ が成立するとき, A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ はすべて正値であることを示せ.

問 3. P を $(n \times n)$ 行列, $M \equiv PP^T$, $N \equiv P^TP$ とする.

(a) M と N の固有値は一致することを示せ.

(b) P が零行列でない限り, M と N の固有値は正であることを示せ.

(c) M の固有値 λ に対する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$, 同じ固有値に対する N の単位固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とするとき, $\boldsymbol{u} = \pm P\boldsymbol{v}/\sqrt{\lambda}, \boldsymbol{v} = \pm P^T\boldsymbol{u}/\sqrt{\lambda}$ が成り立つことを示せ.

(d) M と N の固有値を, 大きい順から順に $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ とする. M の各単位固有ベクトルを列とする行列 $U = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$ と N の各単位固有ベクトルを列とする行列 $V = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$ を定義する. この時, 以下が成り立つことを示せ.

$$P = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} V^T \tag{3}$$

問 4. 式 (3) のように表した $(n \times n)$ 行列 P を考える．ここで $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_n > 0$ となる適当な次数 $r(1 < r < n)$ を選び, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ を無視することによって,

$$P \approx U_r \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix} V_r^T \tag{4}$$

と, P を近似的に表すことができる. ここで U_r, V_r は, U, V の最初の r 列だけからなる $(n \times r)$ 行列である.

各画素が輝度に対応する白黒画像は, 二次元行列として扱うことができる．図 1 (左) に示す 512×512 画素の白黒画像[1]を, (512×512) 行列として扱うことを考える．各画素の値は 4 バイトの実数で記録されており, この画像データのファイルサイズは, $512 \times 512 \times 4$ =1,048,576 バイトである．この画像を行列 P として式 (3) のように分解し, 適当な次数 r を選んで 式 (4) のように近似することを考える．これは, 画像の特徴をできるだけ残したままファイルサイズを小さくする「画像圧縮」に対応する．図 1(中央), (右) に $r = 100, 10$ として画像圧縮した例を示す. 圧縮後のそれぞれの画像データのファイルサイズを計算し, 元のサイズの何%に圧縮したか, 有効数字一桁で示せ.

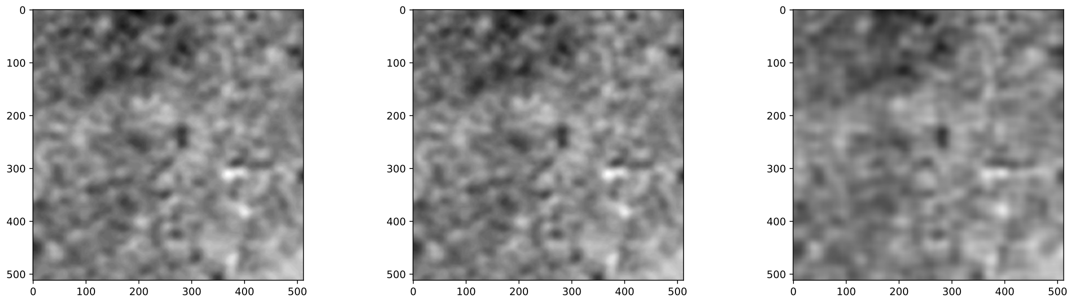

図 1: 左は, ある 512×512 画素の白黒画像. 中央と右は, それぞれ r=100, 10 として左の画像を圧縮して表示したもの.

[1]JAXA の科学衛星データアーカイブ “DARTS” から取得した月面高度データの一部である.

[物理学 1]

誘電率 ε, 透磁率 μ である一様媒質中のマクスウェル方程式は以下のように書ける.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j}$$

ここで, $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は電場および磁束密度, ρ, $\boldsymbol{j}$ は電荷密度および電流密度, t は時間である.
また, 任意のベクトル $\boldsymbol{M}$ について,

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{M}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{M}) - \nabla^2 \boldsymbol{M} \tag{1}$$

が成り立つ.
このとき, 以下の問いに答えよ.

問 1. この媒質中での電磁波を考える.

(a) 電荷と電流が存在しないとき, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ についての波動方程式を導け.

(b) この波動方程式を満たす電磁波の位相速度を求めよ.

問 2. 図 1 のような, 半径 a の芯導線と半径 b で厚さの無視できる外部導体の間が誘電率 ε, 透磁率 μ の誘電体で埋められた同軸ケーブルでの電気信号の伝搬を考える. なお, 同軸ケーブルは半径 b に対して十分に長く, 芯導線および外部導体の電気抵抗は 0 である.

(a) 図 2(左) のように芯導線および外部導体にそれぞれ単位長さあたり Q, $-Q$ の電荷が分布している時, 半径 r での電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ. ただし, $a < r < b$ とする.

(b) この同軸ケーブルの単位長さあたりの静電容量 C を求めよ.

(c) 図 2(右) のように芯導線および外部導体にそれぞれ i, $-i$ の電流が流れている時, 半径 r での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求めよ. ただし, $a < r < b$ とする.

(d) この同軸ケーブルの単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めよ.

図 3 に示すように, この同軸ケーブルの芯導線の微小区間 Δx を考える. この区間において, 外部導体と芯導線の間の電圧を v, 芯導線を流れる電流を i とし, 変位量をそれぞれ Δv, Δi とする.

(e) i の時間変動で生じる誘導起電力 Δv を Δx を用いてあらわし, $\Delta x \to 0$ の極限をとることにより

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{2}$$

となることを示せ.

(f) v の時間変動で生じる電荷移動による電流 Δi を Δx を用いてあらわし, $\Delta x \to 0$ の極限をとることにより

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial v}{\partial t} \tag{3}$$

となることを示せ.

(g) v および i が満たす波動方程式を求め, この同軸ケーブルの芯導線を伝搬する電気信号の伝搬速度が問 1(b) と等しくなることを示せ.

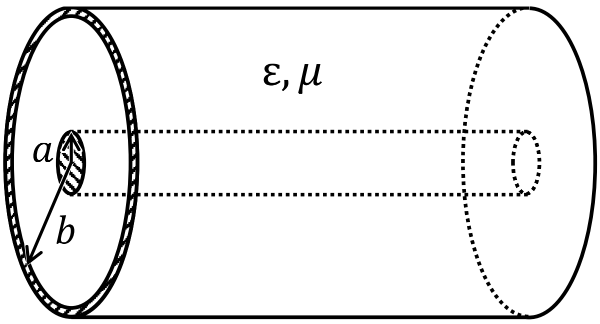

図 1: 同軸ケーブルの模式図

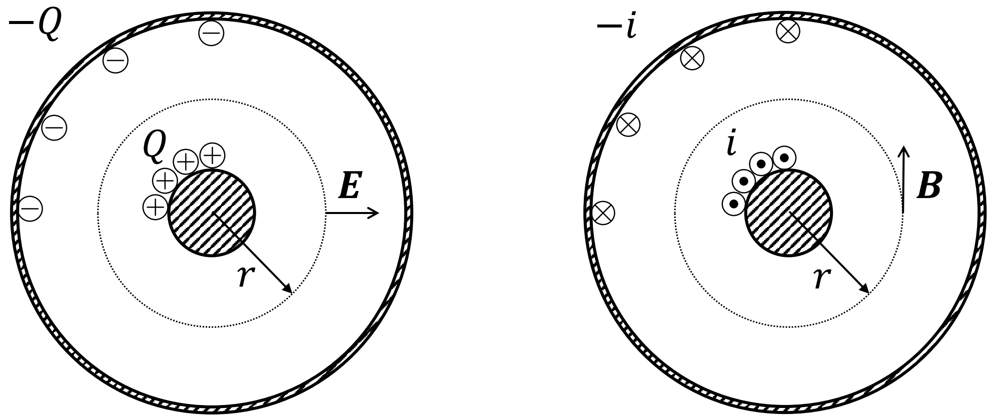

図 2: (左) 同軸ケーブルに電荷が分布しているときの断面図. (右) 同軸ケーブルを紙面に垂直方向に電流が流れている時の断面図.

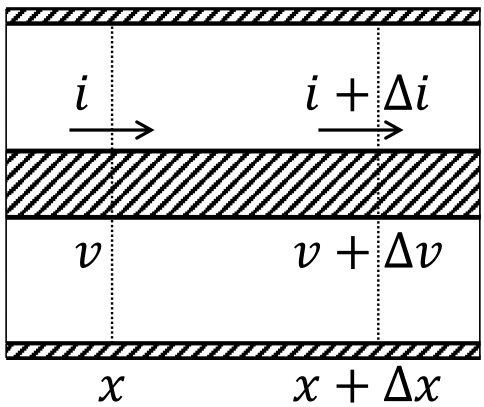

図 3: 同軸ケーブルの芯導線上での電圧・電流の模式図.

[物理学 2]

図 1 に示すように, 距離 ℓ だけ離れた質量 $M/2$ の質点と見なせる 2 つの天体が, 重力で引き合って重心の周りを角速度 ω で回転している系を考える. 天体の回転面を x-y 面, その垂直方向を z 軸となるように座標設定する. この系の重心 O から距離 r ($r > 0$) だけ離れた点を P とし, OP が z 軸となす角度を θ, OP の x-y 面への射影が x 軸となす角度を ϕ とする. この時, 以下の設問に答えよ. なお, 本設問では Gを重力定数, t を時刻とする. t=0の時, 天体 1 は＋X軸上にあるとする.

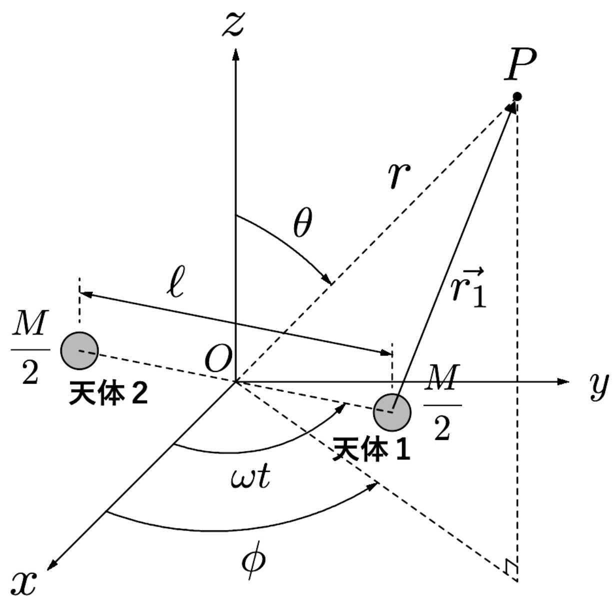

図 1: 距離 ℓ だけ離れた質量 $M/2$ の 2 つの天体が重心の周りを角速度 ω で回転している系.

問 1. 天体 1 の中心から P 点へ伸びるベクトルを $\vec{r}_1$ とするとき, $\vec{r}_1$ の x, y, z 成分を求めよ.

問 2. 地点 P に質量 m の質点を置いた時, 天体 1, 2 が作るこの質点の重力ポテンシャル $U(r)$ が,

$$U(r) = -\frac{G\,m\,M}{2\,r}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ell}{2r}\right)^2-\frac{\ell}{r}\sin\theta\cos(\phi-\omega t)}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ell}{2r}\right)^2+\frac{\ell}{r}\sin\theta\cos(\phi-\omega t)}}\right] \tag{1}$$

となることを示せ.

問 3. O-P 間の距離 r が天体間の距離 ℓ よりも十分に大きい場合（$r \gg \ell$）を考える.

(a) (1) 式の重力ポテンシャル $U(r)$ を $\frac{\ell}{2r}$ についてテイラー展開し, 0 次項, 1 次項, 2 次項を求めよ.

(b) (a) で求めた 0 次項, 1 次項, 2 次項がどのような物理的意味を持っているか, 簡潔な文章で説明せよ.

(c) (a) を用いてこの質量 m の質点が受ける重力の大きさの近似値を求めよ.

(d) (c) で求めた重力の大きさから, 時間変動成分の周波数と振幅を求めよ.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[天文学]

問 1. 光子１つ１つを検出できる単光子検出器を用いて, 天体から定常的に放射される光子の検出器への入射イベント (光子イベント) を測定する. 天体からの放射は相互に独立に起こる事象であるため, ある測定時間内に検出される光子イベント数 x(0 以上の整数) は確率変数となり, その確率分布は以下のようにポアソン分布に従う.

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda} \tag{1}$$

ここで λ は x の期待値である. なお, $0! = 1$ である.

以下では, 天体から 1 秒間に平均で n 個の光子イベントが検出される場合を考える.

(a) t' 秒間に検出される光子イベント数が 0 個である確率 $p(t')$ をもとめよ.

(b) $p(t')$ は, ある光子イベントと次の光子イベントの検出時刻の間隔 (待ち時間) が t' 秒より長くなる確率とも解釈できる. 光子イベントの待ち時間を確率変数 t とし, その確率密度関数を $g(t)$ とすると,

$$p(t') = \int_{t'}^{\infty} g(t)dt \tag{2}$$

の関係が成り立つ. このことから,

$$g(t) = ne^{-nt} \tag{3}$$

となることを示せ.

(c) 光子イベントの待ち時間 t の期待値をもとめよ.

問 2. 光子イベントの待ち時間に見られる性質は, 相互に独立に発生する天体現象である超新星イベント (星の爆発現象) においても期待される. 以下では, ある観測時間内に発生する超新星イベントの数は確率変数であり, その確率分布はポアソン分布に従うものとする. 私達の銀河系の中およびその近傍 (近傍宇宙) では, 西暦 1987 年に出現した SN1987A が最後に観測された超新星イベントである.

地球から観測できる近傍宇宙における超新星イベントの頻度が 50 年に 1 回であるとし, SN1987A の次の超新星イベントが西暦 Y 年に発生するとする。西暦 1987 年から Y 年の間に超新星イベントが発生する確率が 0.5 となる Y 年を整数で答えよ. 計算において自然対数 $\ln(2) = 0.693$ の近似値を使っても良い.

問 3. 光電効果により生成される電子を蓄積する検出器を用いて, 天体から定常的に放射される光子を観測することを考える. t 秒間の露光で検出器内に蓄積される電子の数を X_s とする.

X_s は確率変数であり, その確率分布はポアソン分布に従う. 式 (1) のポアソン分布は期待値 λ が十分に大きい場合に, 正規分布 $\mathrm{N}(\lambda, \lambda)$ で近似できることが知られている. 以下では, X_s は, その期待値が十分に大きいため, 正規分布に従うものとする. また, t 秒間の露光終了後, 蓄積された電子の総数の測定値 X_m を得る際に, 測定誤差 X_r が生じるとする ($X_m = X_s + X_r$). X_r も確率変数であり, $\mathrm{N}(0, \sigma_r^2)$ の正規分布に従うものとする. σ_r^2 は X_r の分散である. なお, 正規分布は以下の特徴を持つことが知られている.

- (定義) 正規分布に従う確率変数 x の確率密度関数は,

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4}$$

  と表される. ここで μ は x の期待値, σ^2 は x の分散である.

- (正規分布の再生性) X, Y をそれぞれ正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う独立な確率変数とすると, $X + Y$ の確率分布は $\mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従う.

- (標準正規分布の線形変換) 確率変数 X の確率分布が標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う場合, 確率変数 $Y = aX + b$ の確率分布は $\mathrm{N}(b, a^2)$ に従う. a と b は実数である.

- (中心極限定理) 期待値 μ, 分散 σ^2 を持つ任意の確率分布に従う n 個の値を $s_1, s_2, \cdots s_n$ とした場合,

$$z = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i - n\mu\right) \tag{5}$$

  の確率分布は, n が十分に大きい時に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う.

天体から 1 秒間に平均で m 個の光子が検出器に入射している場合を考える. ただし, 検出器に入射した各光子は 1 つの電子に変換される (量子効率=1) とする.

(a) X_m が従う確率密度関数 $h(X_m)$ を, X_m, t, m, σ_r の関数としてもとめよ.

(b) 測定値の信頼度を示す指標として, 信号ノイズ比 (S/N 比) を定義する. これは, 測定値が, 測定値の標準偏差の何倍かで定義される値である. $m = 40$, $\sigma_r = 20$ の時, S/N 比の期待値が 30 となる露光時間をもとめよ.

問 4. 計算機上で疑似観測データを生成する方法を考える. 区間 $(0, 1)$ 上に一様分布するように生成した j ($\gg 1$) 個の乱数 $q_1, q_2, \cdots q_j$ を k ($\gg 1$) セット準備する. これらと中心極限定理を用いて, 問 3(a) の $h(X_m)$ の確率分布に従う k 個の数値データ $w_1, w_2, \cdots w_k$ を生成する方法を説明せよ. なお, 区間 $(0, 1)$ の一様分布の期待値は $\frac{1}{2}$, 分散は $\frac{1}{12}$ であることが知られている.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)