

受験番号	
氏名	

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

令和6年度修士・博士課程入学試験問題

専 門 科 目

令和5年8月22日（火） 13時30分–17時30分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題冊子は、この表紙を含めて全部で15ページである。答案用紙は各問につき1枚、計4枚配付してある。確実に配付されていることを確かめよ。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び答案用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
4. 問題は数学1問、物理学2問、天文学1問の計4問である。全問解答せよ。
5. 問題冊子の表紙右上の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ。
6. 各答案用紙の所定欄に、問題番号、受験番号、及び氏名を必ず記入せよ。問題番号は“数学”、“物理学1”、“物理学2”、“天文学”などのように、科目と番号で記入せよ。
7. 解答は各問ごとに1枚の答案用紙を使用せよ。必要なら裏ページを使用してもよい。
8. 解答できない場合でも、4枚全ての答案用紙に問題番号、受験番号、及び氏名を必ず記入して提出せよ。
9. 草稿用紙は別に4枚配付するが、足りなくなった場合は手を挙げて請求すること。
10. 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない。
11. 解答においては、途中の計算過程を省略せずに記述すること。

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学]

問 1. ルジャンドル (Legendre) の多項式は以下のように定義される.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (1)$$

ここで n は 0 または正の整数である.

(a) $n = 2$ の時, $P_2(x)$ を求めよ.

(b) ルジャンドル多項式の母関数は以下のようになることが知られている.

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (2)$$

この母関数を微分することで, $P_{n+1}(x), P_n(x), P_{n-1}(x)$ を関係づける漸化式を求めよ.

問 2. ルジャンドルの陪多項式 $P_l^m(x)$ は, $m \geq 0$ の場合は, 以下のように書ける.

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad (3)$$

一方, $m < 0$ の場合は,

$$P_l^m(x) = P_l^{-m}(x) (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad (4)$$

である.

また, ルジャンドルの多項式 $P_l(x)$ は以下の微分方程式を満たすことが知られている.

$$(1 - x^2) \frac{d^{(m+2)} P_l(x)}{dx^{(m+2)}} - 2x(m+1) \frac{d^{(m+1)} P_l(x)}{dx^{(m+1)}} + \{l(l+1) - m(m+1)\} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} = 0 \quad (5)$$

上式を用いて, $m \geq 0$ のルジャンドルの陪多項式 $P_l^m(x)$ が満たす 2 階線形微分方程式を求めよ.
なお, 解答の際は,

$$P_l^m(x) = v(x) \quad (6)$$

$$\frac{d^m P_l(x)}{dx^m} = u(x) \quad (7)$$

と置き換え, $v(x)$ の微分を $v'(x), v''(x)$ などと表記せよ.

問 3. 以下に示す極座標 (r, θ, ϕ) によるラプラス (Laplace) 方程式を考える.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\} = 0 \quad (8)$$

この方程式は,

$$u(r, \theta, \phi) = R(r) \times Y(\theta, \phi) \quad (9)$$

のように変数分離することが可能である。このとき、 $R(r)$ は以下の式を満たすことが知られている。

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = l(l+1) \quad (10)$$

ここで l は非負の整数である。

$Y(\theta, \phi)$ が満たす微分方程式を求めよ。

問 4. 球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ は、前問のラプラス方程式の解として知られており、ルジャンドルの陪多項式をもちいて、次の式で表される。

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (11)$$

ここで l は非負の整数、 m は $-l \leq m \leq l$ の整数、 i は虚数単位である。

ルジャンドルの陪多項式は以下の規格直交性関係を満たす。

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad (12)$$

そして球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ は、以下のように単位球面上で直交系をつくる。

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \overline{Y_l^m(\theta, \phi)} Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) = C \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (13)$$

ただし、 C は比例定数、 $\overline{Y_l^m(\theta, \phi)}$ は $Y_l^m(\theta, \phi)$ の複素共役で $\overline{Y_l^m(\theta, \phi)} = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \phi)$ となる。ここで $\delta_{kk'}$ はクロネッカーのデルタ記号 (k 及び k' は整数で、 $k \neq k'$ の時 $\delta_{kk'} = 0$ 、 $k = k'$ の時 $\delta_{kk'} = 1$) である。

(a) 次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^{2\pi} d\phi \exp [i(k - k')\phi] = 2\pi \delta_{kk'}. \quad (14)$$

(b) 式 (13) が成り立つことを示すとともに、比例定数 C を求めよ。

[物理学 1]

統計力学に関する以下の問いに答えよ. ボルツマン定数を k_B とする.

問 1. 温度 $T = 10,000 \text{ K}$ の熱平衡にある希薄な気体ヘリウムを考える. ヘリウム原子の基底状態 1S_0 (縮重度 = 1) と, 最もエネルギー準位の低い励起状態 3S_1 (縮重度 = 3) とのエネルギー差を $\Delta\epsilon$ とする. 次に高い励起状態と 3S_1 とのエネルギー準位の差は $k_B T$ より十分に大きいため, その存在確率は無視できる. 従って, この系は 1S_0 と 3S_1 の 2 準位系とみなせる. なお, 量子状態 n のエネルギー準位を ϵ_n , その量子状態の縮重度を g_n , 温度を T とした場合, 一つの原子の分配関数は $\sum_n g_n \exp\left(-\frac{\epsilon_n}{k_B T}\right)$ で与えられる.

(a) 3S_1 に存在する原子の割合 P_1 を $\Delta\epsilon, T, k_B$ を用いて示せ.

(b) $\Delta\epsilon$ が $2.0 \times 10^1 \text{ eV}$ の時の P_1 を有効数字 1 桁で求めよ. 1 eV は電子を 1 V の電位差で加速したときのエネルギーである. 電子の電荷を $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とする. ボルツマン定数を $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ とする. $\log_{10}(e) \sim 0.43$ の近似値を使ってもよい.

問 2. N 個の原子 ($N \gg 1$) が, N 個の格子点に規則正しく並んだ完全結晶がある. 図 1 のように, これらの原子の 1 個が結晶内部の位置から表面に移ると, 格子点が 1 つ増えると同時に格子欠陥が 1 つ増え (ショットキー欠陥), 不完全結晶となる. 一つの原子を表面に移すのにはエネルギー ϵ を要する. 1 つ 1 つの原子は区別できず, また, 1 つの格子点の位置には, 1 つの原子のみが入れるとする. 格子欠陥は, 元からある格子点にも, 増えた格子点にも平等に生じうるとする. 原子の移動による結晶の体積変化の影響は無視してよい.

(a) 格子欠陥が n 個 ($n \gg 1$) の時, 原子の配置の場合の数 W を求めよ.

(b) この系のエントロピーは $S = k_B \ln W$ と表すことができる. 格子欠陥が n 個の時の $\frac{S}{N}$ を, k_B と $\frac{n}{N}$ の関数として求めよ. なお, 導出した関数の中に階乗の項が含まれる場合は, スターリングの近似式 (m が 1 より十分に大きい整数の時, $\ln(m!) \simeq m\{\ln(m) - 1\}$) を用いて解答すること.

(c) この系のエネルギーは $E = n\epsilon$ と表すことができる. 格子欠陥の数 n を, 温度 T の関数として求めよ. なお, 系のエントロピー S と温度 T の間には, $\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$ の関係が成り立つ.

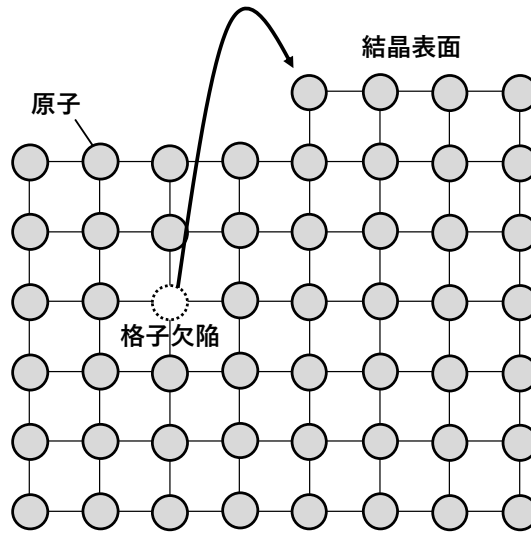


図 1: ショットキー欠陥の模式図

問 3. 固体を構成する原子が磁気モーメント μ をもち、その向きが上下 2 方向に制限されている場合を考える。この固体を磁場 B の中に置くと、この系は、各原子がエネルギー $\pm\mu B$ の 2 つの量子状態をもつ 2 準位系となる。この固体は N 個の原子 ($N \gg 1$) からなり、温度 T の熱平衡にあるとする。原子間の磁気相互作用による内部磁場は無視できるほど小さいとする。なお、量子状態 n の 1 つの原子が持つエネルギーを ϵ_n とした場合、1 つの原子の分配関数 z 、系のヘルムホルツ自由エネルギー F 、系のエントロピー S の間には、 $z = \sum_n \exp\left(-\frac{\epsilon_n}{k_B T}\right)$ 、 $F = -Nk_B T \ln(z)$ 、 $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_B$ の関係が成り立つ。

(a) この系のヘルムホルツ自由エネルギー F を求めよ。

(b) この系のエントロピー S を求めよ。

(c) この系のエントロピーは、 $k_B T \ll \mu B$ の低温条件において、 $S \simeq \frac{2N\mu B}{T} \exp\left(-\frac{2\mu B}{k_B T}\right)$ と近似できることを示せ。

(d) $k_B T \ll \mu B$ の低温条件における温度 T_1 にて、この系を磁場 B_1 中に置いた後、外から熱が入らないようにして、磁場を $B_2 = \frac{1}{10} B_1$ までゆっくり減少させることを考える (断熱消磁)。この時に到達する温度 T_2 を求めよ。

[物理学 2]

光は空間を伝搬する電場 E の波で記述できる. 図1のように x 軸と垂直なスリット面とスクリーン面をそれぞれ $x = 0$ と $x = L$ (ただし $L > 0$) に置き, $x = -\infty$ に置いた単色光源 (波長 λ , 周波数 ν) で照らす. 光源が十分遠方にあるため, $x \leq 0$ の空間を伝搬する電場は $E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ の大きさの平面波であり, その振動方向は紙面に垂直であるとする. ここで, $k = 2\pi/\lambda$ は波数, $\omega = 2\pi\nu$ は角周波数である. 波の干渉を考慮して, 光の回折に関する以下の問いに答えよ.

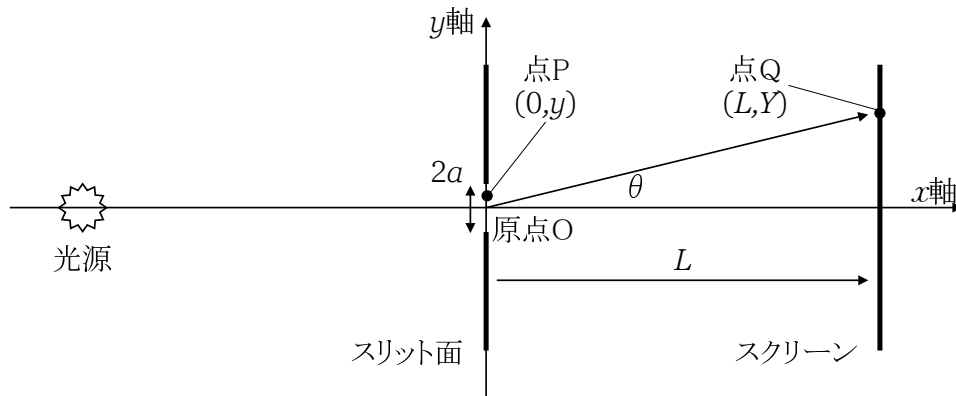


図 1: 光の回折実験配置

問 1. 原点を中心として幅 $2a$ のスリットを図1のように置く. スリット内の点 $P(0, y)$ とスクリーン上の点 $Q(L, Y)$ を考え, 原点と点 Q を結ぶ線と x 軸とのなす角を θ とし, $\lambda \ll a \ll L$ および $|Y| \ll L$ の場合を考える.

- 点 P と点 Q の間の距離 l を L, θ, y を使って示せ. ただし, y/L の二次以上の項は無視し, θ について二次まで展開した式で示すこと.
- スリット内の電場 $E_0 e^{-i\omega t}$ が波としてスクリーンへ伝搬するとき, θ に対応するスクリーン上の位置 Q での時刻 t における電場 $E(\theta)$ を, y の積分の形で示せ. $\theta = 0$ での電場振幅を \mathcal{E} として規格化すること. ただし, y と Y で定まるある光路を伝搬してスクリーンに届く光の電場振幅は, y と Y によらず一定と近似できるものとする.
- (b) の y の積分を計算し, スクリーン上の光の強度分布 $I(\theta) \propto |E(\theta)|^2$ を求めよ. ただし, ピーク値が 1 になるよう規格化せよ.
- $I(\theta) = 0$ を満たす x 軸に最も近い点 Q_0 に対応する角度 θ_0 を, λ と a を使って示せ. また, 原点から点 Q_0 の方向に進む光子の運動量の y 成分 p_y を求め ($\theta_0 \ll 1$ より, θ_0 の一次まで考慮する), $a \cdot p_y$ が λ や a によらない定数であることを示せ. なお, プランク定数を h とする.

問 2. 問 1(b) で求めた電場 $E(\theta)$ の積分部分は, スリット面での開口の形状を示す以下の関数 $A_1(y)$ のフーリエ変換の問題に帰着できる.

$$A_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{for } |y| \leq a \\ 0 & \text{for } |y| > a \end{cases} \quad (1)$$

なお, 任意の関数 $f(\xi)$ に対するフーリエ変換 $\mathcal{F}_{[f(\xi)]}(\kappa)$ は以下の式で与えられる.

$$\mathcal{F}_{[f(\xi)]}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\kappa\xi} d\xi \quad (2)$$

これを応用して, 図2のような, 幅が無視できる $(2N+1)$ 本の等間隔スリットからなる幅 $2a$ の透過型回折格子の振舞いを考察する.

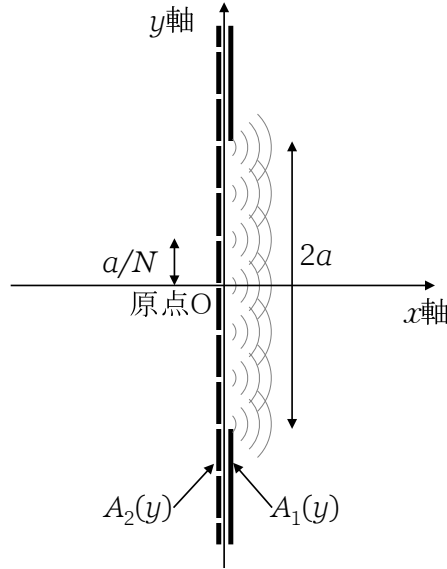


図 2: 透過型回折格子のモデル (スリット面の部分)

この回折格子の開口の形状は, 関数 $A_1(y)$ で表されるスリットに, 以下の関数 $A_2(y)$ で表されるスリット面を重ねることで表現できる.

$$A_2(y) = \text{comb}(y; a/N) \quad (3)$$

ここで comb は一定周期 T でデルタ関数が並ぶ「くし関数」

$$\text{comb}(\xi; T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n \cdot T) \quad (4)$$

であり (n は整数), 以下の式のように, 周期 T のくし関数はフーリエ変換によって周期 $2\pi/T$ のくし関数に変換される.

$$\mathcal{F}_{[\text{comb}(\xi; T)]}(\kappa) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \text{comb}(\kappa; 2\pi/T) \quad (5)$$

また, 必要であれば, 以下の式で示すフーリエ変換の性質

$$\mathcal{F}_{[f(\xi) \cdot g(\xi)]}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{[f(\xi)]}(\kappa') \cdot \mathcal{F}_{[g(\xi)]}(\kappa - \kappa') d\kappa' \quad (6)$$

を使用せよ. なお, $\lambda \ll a \ll L$ および $|Y| \ll L$ とする.

- (a) この透過型回折格子によってスクリーン上に生じる光の強度分布 $I(\theta)$ は, $\kappa = k\theta$ として, 2つの関数 $\mathcal{F}_a(\kappa)$, $\mathcal{F}_b(\kappa)$ の畳み込み (畳み込み積分) [式 (6) の右辺] の絶対値の2乗で表すことができる. $\mathcal{F}_a(\kappa)$ と $\mathcal{F}_b(\kappa)$ を答えよ. ただし, 順不同でよく, 定数倍の違いも不問とする.
- (b) $I(\theta)$ は θ に対する周期関数である. その周期 θ_T を, N, λ, a を使って示せ.
- (c) (b) で求めた周期 θ_T と問 1 (d) で求めた角度 θ_0 から, ここで考察した回折格子の1次回折光による波長分解能が $\lambda/\Delta\lambda = \theta_T/(2\theta_0)$ のように求められる. ここで $\Delta\lambda$ は, 分解できる最小波長間隔とする. 波長 $1\mu\text{m}$ 付近の連続光を $\Delta\lambda = 1\text{nm}$ の細かさで分光するために必要なスリット本数 $(2N + 1)$ を, 有効数字1桁で算出せよ.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[天文学]

図1のように、質量 M の静止している天体 S の周りに質量 m ($m \ll M$) の星が S に対してランダムな方向へ運動しているとする。これら周りの星の数密度は n であり、一様に分布している。また、 S から十分離れた場所での周りの星の速度の大きさは全て同じ v_{inf} である。周りの星どうしに働く重力は無視できるとして、以下の問いに答えよ。なお、重力定数 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 、太陽の質量 $M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、太陽の半径 $R_{\odot} = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$ とする。

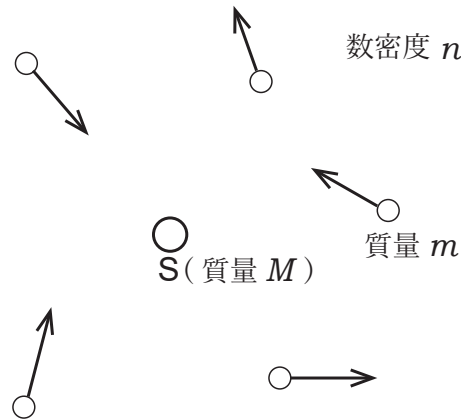


図 1: 質量 M の天体 S とその周りの質量 m の星の模式図

問 1. 天体 S と周りの星は全て恒星（以下、星とする）であり、 S と周りの星の半径の和を R_s とする。また、星と天体 S との距離が R_s より小さい時に衝突が起こるとする。

- S と周りの星の間に働く重力を無視できるとき、 S が周りの星の一つと衝突する衝突断面積 σ を答えよ。
- このとき、 S に周りの星が衝突する頻度（単位時間当たりの衝突回数の期待値）を Γ とする。 Γ は単位時間当たりに衝突断面積を通過する星の数の期待値として与えられる。 Γ を、 v_{inf} , n , R_s を用いて表せ。
- 次に、 S と周りの星の間に働く重力を考慮して衝突頻度を求める。そのために、図2のように、 S を中心として見た質量 m の星 P の運動（2体問題）を考える。無限遠での相対速度の大きさは v_{inf} 、衝突パラメータは b であり、 P と S の最近接距離を r_p とするとき、角運動量保存則を用いて、 r_p での P の速度の大きさ v_{max} を、 v_{inf} , b , r_p を用いて表せ。
- 前問で得られた関係式から、もう一つの保存則を利用して v_{max} を消去し、 b^2 を r_p , v_{inf} , G , M を用いて表わせ。
- S の中心から R_s だけ離れた場所での、 S の重力からの脱出速度 v_{esc} を R_s , G , M を用いて答えよ。
- S と周りの星の間に働く重力を考慮した場合に、 S が周りの星の一つと衝突する頻度 Γ' を R_s , v_{esc} , v_{inf} , n を用いて表せ。
- $M = 100M_{\odot}$, $m = 1M_{\odot}$, $R_s = 10R_{\odot}$, $v_{\text{inf}} = 10 \text{ km s}^{-1}$ とする。 S と周りの星の間に働く重力を考慮した場合の衝突頻度は、考慮しない場合よりおよそ何倍上がるか、有効数字1桁で答えよ。

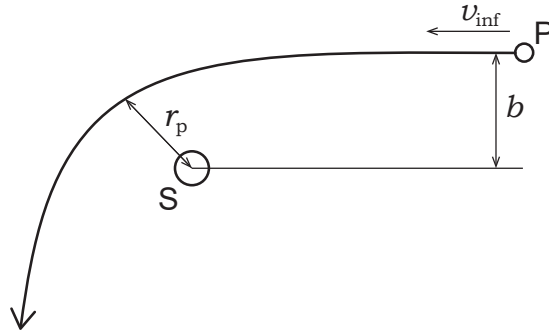


図 2: 質量 M の星 S を中心として見た質量 m の星 P の軌道の模式図.

問 2. 次に, 天体 S がブラックホールである場合を考える. ブラックホールの半径は恒星と比べて非常に小さいが, 周りの星がブラックホールに近づくと潮汐力によって破壊されてしまう (潮汐破壊). 以下では, 潮汐力による星の破壊について考察する. ただし, 潮汐力による星の変形や相対論的効果は考慮しなくてよい.

- (a) S の周りにある星 P が S から受ける潮汐力について考える. 図 3 のように, P の中心と S の中心を結んだ直線上かつ星 P の表面の点を Q とする. 星 P の半径を R , P の中心から S の中心までの距離を r とし, $R \ll r$ であるとする. 点 Q で働く潮汐力による加速度は, 点 Q での S による重力加速度と, 星 P の中心でのそれとの差であることを用い, 点 Q での潮汐力による加速度を r, R, G, M を用いて表せ. ただし, S と P は静止しているとしてよい.
- (b) 潮汐力と星自身の重力が釣り合う半径を潮汐半径 (r_{tid}) といい, 潮汐破壊は潮汐半径が星の半径より小さくなったときに起こる. 潮汐半径では潮汐力による加速度と星 P による重力加速度が等しいことを用いて, 星 P の潮汐半径 r_{tid} を r, m, M を用いて表わせ. ただし, $r_{\text{tid}} \ll r$ であることを利用し, テイラー展開の 1 次の項までを用いること.
- (c) S が $100M_{\odot}$ のブラックホールであるとき, 周りを運動する $1M_{\odot}$ の星は太陽半径の何倍までブラックホールに近づくと潮汐破壊されるか, 問 2(b) で求めた潮汐半径を用いて計算し, 有効数字一桁で答えよ. ただし, $1M_{\odot}$ の星の半径は $1R_{\odot}$ とする. また, 計算には $\sqrt[3]{2} = 1.3$, $\sqrt[3]{10} = 2.2$ を用いてよい.
- (d) 問 1(g) で求めた, S が恒星で周りの星が S へ衝突する頻度と, S がブラックホールで周りの星が潮汐破壊される頻度を比較する. S と周りの星の間の重力を考慮し, 問 2(c) の条件を用いて, どちらが何倍大きいか有効数字一桁で答えよ. ただし, n と v_{inf} は両者で同じとする.

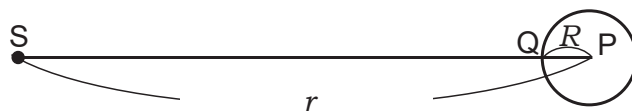


図 3: 潮汐力を求める点 Q の模式図

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)