| 受験番号 | |
|---|---|
| 氏　　名 | |

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

平成 31 年度修士・博士課程入学試験問題

# 専　　門　　科　　目

平成 30 年 8 月 21 日（火）　　13 時 30 分–17 時 30 分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で 17 ページである.
3. 答案用紙は各問につき 1 枚, 計 4 枚配付してある. 確実に配付されていることを確かめよ.
4. 問題は数学 2 問, 物理学 2 問, 天文学 2 問の計 6 問である. この中から, 数学と物理学のそれぞれ少なくとも 1 問を含む 4 問を選んで解答せよ.
5. 問題冊子の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ.
6. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号, 受験番号, 及び氏名を必ず記入せよ. 問題番号は “数学 1”, “物理学 2”, “天文学 1” などのように, 科目と番号で記入せよ.
7. 解答は各問ごとに 1 枚の答案用紙を使用せよ. 必要なら裏ページを使用してもよい.
8. 解答できない場合でも, 4 枚全ての答案用紙に問題番号, 受験番号, 及び氏名を必ず記入して提出せよ.
9. 草稿用紙は別に 4 枚配付するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.
10. 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない.
11. 解答においては, 途中の計算過程を省略せずに記述すること.

(草稿に使ってもよい．ただし，切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

## [数学 1]

1 次元の弦の振動を表す波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

に関して, 以下の設問に答えよ.

問 1. (a) 変数 $p, q$ を次のように定義する.

$$p = x - ct$$
$$q = x + ct$$

波動方程式 (1) の解 $u(x,t)$ を変数 $p, q$ を用いて表したものを $U(p,q)$ とする. 波動方程式 (1) を変数変換することで $U(p,q)$ についての偏微分方程式を導出せよ.

(b) (a) で導出した偏微分方程式を解き, 波動方程式 (1) の一般解が, 任意関数 $g, h$ を用いて

$$u(x,t) = g(x - ct) + h(x + ct) \tag{2}$$

と表されることを示せ. 式 (2) はダランベールの解として知られている.

問 2. $t = 0$ での弦の変位およびその時間変化率を

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = F_1(x) \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = F_2(x) \end{cases} \tag{3}$$

とする.

(a) 初期条件 (3) を, 問 1(b) の $g$ と $h$ を用いて表せ.

(b) 初期条件 (3) を満たす波動方程式 (1) の解はストークスの公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{F_1(x - ct) + F_1(x + ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} F_2(x')dx' \tag{4}$$

で与えられる. (a) で導出した式を参考にして, ストークスの公式を導出せよ.

問 3. 弦を $x = 0, x = l$ で固定する. すなわち境界条件

$$\begin{cases} u(x,t)|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

を課す. $t = 0$ での初期条件は $0 \leq x \leq l$ で定義されたなめらかな関数 $f_1(x), f_2(x)$ で与えられるとする. すなわち,

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = f_1(x) \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x) \end{cases} \qquad (0 \leq x \leq l)$$

である．このとき, ストークスの公式を用いて

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f_1(x-ct)+f_1(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f_2(x')dx'$$

とすると，$f_1(x), f_2(x)$ が $0 \leq x \leq l$ の範囲でしか定義されていないのに，$t > 0$ において $x-ct, x+ct$ はこの範囲外の値もとるので問題が生じる．しかし, $f_1(x), f_2(x)$ を $-\infty < x < \infty$ に拡張した関数を新たに $F_1(x), F_2(x)$ とし, 波動方程式 (1) の解が式 (4) で与えられるようにすることができる.

(a) $f_1(x)$ が図 1 に示されるような関数であり, $f_2(x)$=0 であるとする．このとき $F_1(x)$, $F_2(x)$ は $-\infty < x < \infty$ でどのような関数か．解答欄に図示するとともに, 導出過程を簡潔に述べよ.

(b) 初期条件を

$$\begin{cases} f_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \\ \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \qquad (0 \leq x \leq l) \tag{6}$$

とする．$f_1(x)$ を図示したのが図 2 である．この初期条件を満たす波動方程式 (1) の解を, ストークスの公式を用いて求めよ.

問 4. (a) 波動方程式には複数の解法が知られている．ストークスの公式はそのひとつであり, ダランベールの解で示される波の伝搬が陽に現れる．一方, 境界条件を満たす波動方程式を解く際には, 変数分離法もよく用いられる．変数分離法では, $u(x,t) = X(x)T(t)$ として境界条件を満たす解を求め, その重ね合わせによって初期条件を満たす解を得る．境界条件 (5), 初期条件 (6) を満たす波動方程式 (1) の解を変数分離法を用いて求めよ.

(b) (a) で得られた解と問 3(b) で得られた解が一致することを示せ.

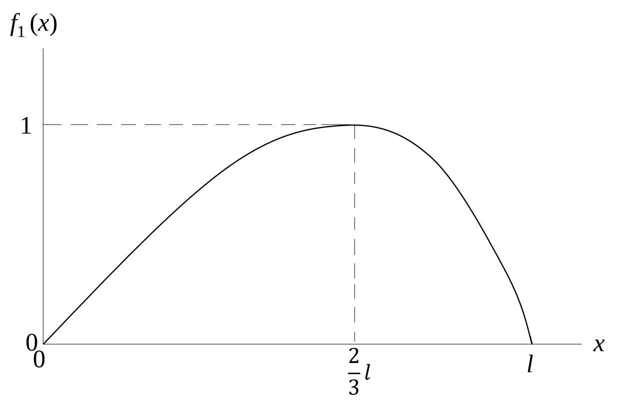


図 1:

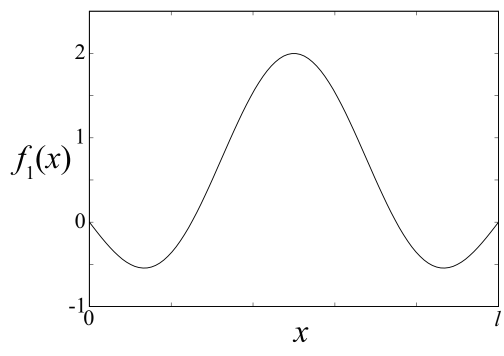


図 2:

## [数学 2]

以下の設問に答えよ.

問 1. 複素数 $z$ を変数とする代数方程式

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1} z + c_n = 0 \tag{1}$$

を考える. ただし $c_0 \neq 0$ とする.

(a) 各項の係数 $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ が実数のとき, $\alpha + \beta i$ ($\alpha$, $\beta$ は実数, $i$ は虚数単位) が代数方程式 (1) の解であれば, $\alpha - \beta i$ も解であることを示せ.

(b) 代数方程式 (1) の解を $z_1, z_2, ..., z_n$ とするとき, 全ての解の和 $z_1 + z_2 + ... + z_n$ および全ての解の積 $z_1 z_2 ... z_{n-1} z_n$ を求めよ.

(c) 解の実部と虚部が全て整数となる代数方程式 $z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10 = 0$ の解を全て求めよ. (a) (b) の結果を利用すると見通しがよくなるが, その利用は必須ではない.

問 2. 次の微分方程式を解き, 一般解 $y(x)$ を求めよ. なお, (c) は $dy/dx = f(y/x)$ という関数形に変形できることを利用するとよい.

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 6e^x \sin x$

(c) $(x^2 - 4y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

問 3. 次の積分方程式を解き, $f(x)$ を求めよ.

(a) $f(x) = 1 - 2\displaystyle\int_0^x t f(t) dt$

(b) $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 (t + x) f(t) dt$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \cos \alpha x dx = g(\alpha)$

$$g(\alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha & (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

## [物理学 1]

質量 $M$ の 1 個の粒子が箱の中で運動している．箱の 3 辺の長さは, $x, y, z$ 軸方向でそれぞれ $a, b, c$ であり, 箱の中心は $(x, y, z) = (a/2, b/2, c/2)$ とする．箱の壁の厚みは無視できるものとする．また, 箱の中のポテンシャル $V(x, y, z)$ はゼロとし, 箱の外部では $V = \infty$ とする．この粒子のエネルギー固有状態を時間に依存しないシュレーディンガー方程式,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V\right)\Psi = E\Psi \tag{1}$$

を解いて求めたい．ここで $\Psi(x, y, z)$ は波動関数, $E$ はエネルギー固有値, $\vec{\nabla}$ は微分演算子

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{2}$$

である．また, $\hbar = h/(2\pi)$ で $h$ はプランク定数である．波動関数は連続で, 箱の外ではゼロであり, 箱の中で規格化されているものとする．以下の設問に答えよ.

問 1. $\Psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$ として, シュレーディンガー方程式を変数分離し, $\psi_x(x)$ の満たす 1 次元の方程式を導け．$\psi_x(x)$ に対するエネルギー固有値を $e_x$ とする.

問 2. 波動関数の形として, $\psi_x(x) = C_+ \exp(ikx) + C_- \exp(-ikx)$ を仮定して, 問 1 で求めた方程式と境界条件を満たす波動関数を求め, そのエネルギー固有値 $e_x$ を自然数 $l$ を用いて表せ．$C_+$ ,$C_-$ はともに定数であり, $i$ は虚数単位である.

問 3. 波動関数およびエネルギー固有値を 3 次元に拡張したもの, $\Psi(x, y, z)$ および $E_{lmn}$ を求めよ．ただし, $m, n$ は, $y$, $z$ 軸方向での量子数に対応した自然数である.

問 4. 上で求めた波動関数に対して, 運動量 $\vec{p}$ の各成分の期待値を求めよ．ここで, $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ である.

問 5. 上で求めた波動関数に対して, 位置 $\vec{r}$, および角運動量 $\vec{l}$ $(= \vec{r} \times \vec{p})$ の期待値を求めよ.

問 6. 箱が $a = b = c$ の立方体である場合を考える．最もエネルギーの低いエネルギー固有状態を示せ．さらに, 3 重に縮退するエネルギー固有状態の例と, それより縮退度が大きくなる場合の例をそれぞれ 1 つ示せ.

## [物理学 2]

以下の設問に答えよ．なお，プランク定数を $h$, 光速を $c$ とする．

問 1. あるレーザーポインターからは波長 $\lambda$ の光が単位時間あたりのエネルギー $P$ で放射される．このレーザーポインターから単位時間当たりに放出される光子の数 $\dot{N}$ を求めよ．また，このレーザー光を正面から受け，それを完全反射しているときに受ける力 $F$ を求めよ．

問 2. 図 1 のように，静止している電子 (質量 $m$) に波長 $\lambda$ の X 線を照射した．入射光子の一つが電子との相互作用で散乱され，入射光子の運動方向 ($x$ 軸) から反時計回りに測った角度 $\theta$ の方向に散乱 X 線が観測された．散乱 X 線の波長は $\lambda'$ ($= \lambda + \Delta\lambda$) であった．$\Delta\lambda$ を求める方程式を $\lambda$ と $\theta$ の関数として表せ．また，$\Delta\lambda$ は正の実数解を一つだけ持つことを示せ．ただし，入射光子のエネルギーは電子の静止質量エネルギーよりも十分に小さく，電子の運動は非相対論的に扱えるものとする．また，電子の速度を $v$ とし，$x$ 軸から $\theta$ とは反対方向（時計回り）に測った電子の運動方向の角度を $\phi$ とする．

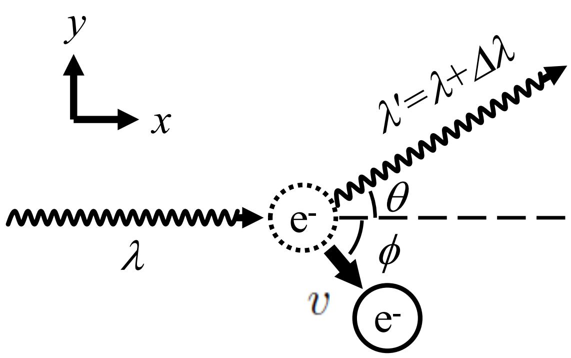


図 1: X 線による電子の散乱

問 3. 理想気体と光子気体に関する以下の設問に答えよ．

(a) 1 辺の長さが $L$, 体積 $V$ $(= L^3)$ の立方体の容器の中に，1 個当たりの質量が $m$ の気体粒子が $N$ 個入っており，理想気体として取り扱えるとする．容器の各辺に合わせて $x$ 軸, $y$ 軸, $z$ 軸をとり，$x$ 軸に垂直な壁を W とする．速度ベクトル $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を持つある 1 個の粒子が壁 W に当たって完全反射することで壁に与える力積 $I_x$ を求めよ．また，この 1 個の分子が壁 W に与える圧力 $\Delta P(v_x)$ を求めよ．

(b) 上記の結果をすべての粒子について和をとることにより，気体の圧力 $P$ を, $V$, $N$, $m$ と $\langle v^2 \rangle$ を用いて表せ．ここで $v = |\vec{v}|$ であり，$\langle v^2 \rangle$ は $v^2$ の全粒子についての平均である．粒子の内部自由度にともなうエネルギーが無い場合，この気体の圧力 $P$ と内部エネルギー密度 $u$ の関係を求めよ．なお，$v_x^2$ の全粒子平均は，$\langle v_x^2 \rangle$ で表すこととする．

(c) 次に，光子気体の状態を分子運動論的に考える．(a) と同じサイズの立方体の容器の中に，光子が $N$ 個入っているとする．このとき，光子気体の圧力 $P$ と内部エネルギー密度 $u$ の関係を求めよ．ただし，光子の運動量を $\vec{p} = p\,\vec{v}/c$ とし，光子のエネルギー $E$ との関係は $E = cp$ で与えられる．

(d) 光子気体の内部エネルギー密度 $u = U/V$（$U$ は内部エネルギー）が温度 $T$ だけの関数であるとすると, 熱力学の関係式 $(\partial U/\partial V)_T = T(\partial P/\partial T)_V - P$ から, $u$ は $T^4$ に比例することを示せ.

(e) 光子気体が断熱膨張する場合には, $PV^\gamma =$ 定数が成り立つ. この時の $\gamma$ を求めよ.

## [天文学 1]

地上望遠鏡による観測では光（電磁波）に対する大気の影響をよく理解することが重要である．望遠鏡を天頂角 $Z$ の方向に向けた場合を考える．以下の設問に答えよ．なお天頂角とは観測者の真上の方向からの角度であり，以下では地表の曲率は無視できるとする．数字で答える場合は有効数字 2 桁で答えよ．

問 1. 天体からの光は地球大気を通過すると減衰し，光路上の大気量が増えるほど減衰量は大きくなる．いま，簡単のために大気密度 $\rho$ は高度 $h$ だけで決まるとする．また大気の屈折による影響はここでは考えなくてよい．

(a) 天頂 $(Z = 0)$ にある天体からの光が高度 $h$ から $h - dh$ に至る際，通過する光路上の大気量（柱密度）は $\rho\,dh$ とかける．天体が天頂角 $Z$ の方向にある場合，高度 $h$ から $h - dh$ に至る光路上の大気量を $Z, \rho, dh$ を用いて示せ．

(b) 天頂角が $Z$ となる方向での光路上の全大気量は，天頂方向での全大気量の何倍になるか．$Z$ を用いて表せ．

(c) 天頂角が $Z$ となる方向での大気透過率 $T$ を，天頂方向での大気透過率 $T_0$ と $Z$ を用いて表せ．また $T_0 = 0.89$ で $Z = \pi/3$ のとき，$T$ を数字で求めよ．

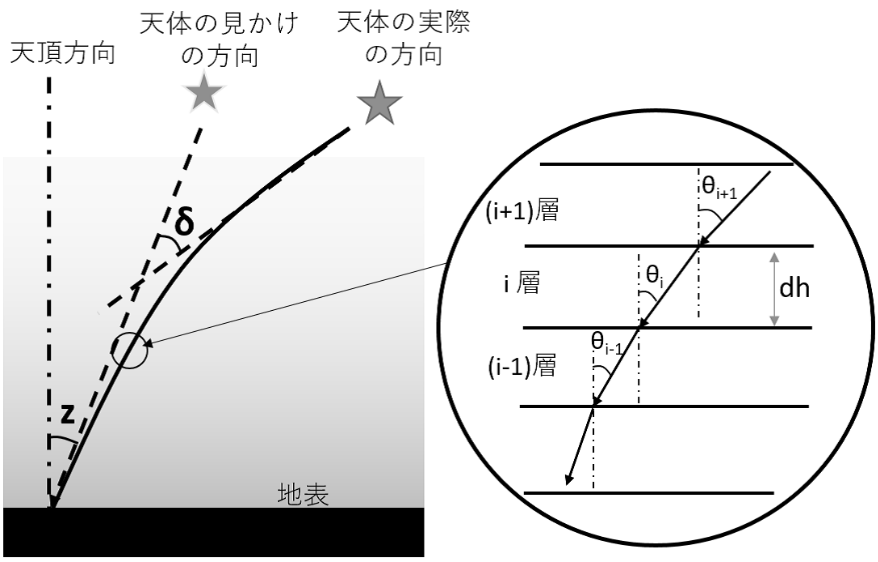


図 1: 大気差の概念説明

問 2. 屈折率 $n$ の媒質中での光速 $v$ は真空中での光速 $c$ を用いて $v = c/n$ となる．高度 $h$ における大気の屈折率が

$$n - 1 = k \exp(-h/H) \tag{1}$$

で記述できるとする．ここで $H$ は大気のスケールハイトと呼ばれる定数であり，$k$ も $h$ に依存しない定数である．

天体からの光が地表に対し斜めに入射すると屈折の影響で光路が曲げられてしまう. これは大気差と呼ばれる現象である. 天体の真の方向と見かけの方向の角度差を $\delta$ とする (図 1). 大気を薄い層の集まりと考え, 一つの層の中では屈折率が一定とみなせるとする. 地表から $i$ 番目の平面層の屈折率を $n_i$ とし, 角度 $\theta_i$ を図 1 のように定義する.

(a) $\theta_i$, $\theta_{i+1}$ と $n_i$, $n_{i+1}$ の間に成り立つ関係式を求めよ.

(b) $\delta$ は定数 $\delta_0$ を用いて

$$\delta = \delta_0 \tan Z \tag{2}$$

と近似できることを示し, $\delta_0$ を $k$ を用いて表せ. なお, $\delta$ は十分小さい角度としてよい.

(c) $k$ は図 2 に示すような観測波長依存性を持つ. 波長 $\lambda = 0.55\,\mu$m, 天頂角 $Z = \pi/3$ での大気差 $\delta$ を秒角単位で求めよ. なお 1 秒角は 1/3600 度であり, ラジアンに換算すると $4.85 \times 10^{-6}$ rad である.

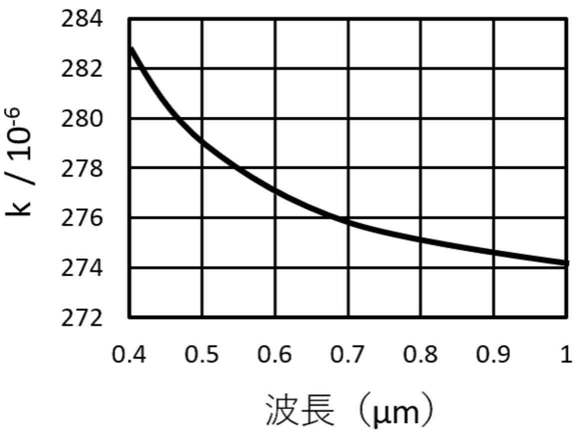


図 2: $k$ の波長依存性

問 3. 大気差は波長によって異なるので, 波長によって天体の見える方向が異なってしまう. これを大気分散と呼ぶ. 問 2 と同じ環境下で, 波長 $\lambda = 0.4\,\mu\mathrm{m} - 0.7\,\mu\mathrm{m}$ を一様に通すフィルターを用いて撮像観測を行ったとする.

(a) $Z = \pi/3$ の時, フィルターの透過波長域の両端に対応する, 大気分散による角度ずれ量 $\Delta\delta$ を秒角単位で求めよ.

(b) この観測でのシーイングサイズ (大気揺らぎによる点源像のサイズ）は 0.7 秒角であった. 天頂角を 0 から徐々に増やした場合に, 大気分散の天体画像への影響がどうなるか, 定量的に論じよ. なお, 単一波長での観測では画像解像度はシーイングで決まっており, シーイングの波長依存性は考慮しなくてよい.

## [天文学 2]

問 1. 半径 $R$ の球対称なガス球に関する以下の問いに答えよ. なお, 重力定数を $G$ とする.

(a) このガス球が一様な密度 $\rho$ を持つとしたときの重力エネルギー $E_{\rm G}$ を, $\rho$, $R$ および $G$ で表せ.

(b) ガス球は真空中に静止しているが, 内部のガス粒子は運動速度を持つ. 全ガス粒子がもつ運動エネルギー $E_{\rm K}$ が $2E_{\rm K} + E_{\rm G} = 0$ を満たすとき, ガス球は安定である. 一様な密度 $\rho$ を持つガス球がこの条件を満たし, ガス粒子の 2 乗平均速度が $\langle v^2 \rangle$ であるとき, ガス球の半径 $R$ と質量 $M$ を $\rho$, $\langle v^2 \rangle$, および $G$ で表せ.

(c) より現実的な場合として, 密度 $\rho$ が半径依存性を持ち, 静水圧平衡にあるガス球を考える. 半径 $r$ 以内に含まれる質量を $M_r$ とするとき, 半径 $r$ での圧力 $P_r$ が満たす微分方程式を求めよ. また, $M_r$ の微分 $dM_r/dr$ と $r$, $\rho$ の関係式を書け.

(d) (c) のガス球が半径 $r = R$ の位置で外圧 $P_R$ により支えられている. このガス球の温度が一様, すなわちガス粒子の 2 乗平均速度 $\langle v^2 \rangle$ が半径に対して一定であり, 密度が半径のべき乗に比例する ($\rho = Cr^{-\alpha}$, $C$ は定数) 場合の密度 $\rho$ を半径 $r$ の関数として求めよ. また, このときの外圧 $P_R$ の値を求めよ. なお, 気体の圧力は

$$P_r = \frac{1}{3}\rho \langle v^2 \rangle \tag{1}$$

で与えられるものとする.

問 2. 天体を理解する上で, その周辺の物質の運動を把握することは重要である. 望遠鏡による分光撮像観測では, 既知のスペクトル線のドップラーシフトを測定することで, 天球面 ($X$-$Y$ 面) 上に投影された天体の空間分布に加えて, 視線 ($Z$ 軸) 方向の運動を測定することができる. 例えば, 図 1 のような天球面上での空間分布を持つ天体があり, その奥行きと速度構造は図 2(左) のような一定速度で物質が放出されるジェットであったとする. この天体の $X$ 軸に沿った分光データを取得した場合, 図 2(右) のような位置と速度の対応関係が得られる. これを「位置-速度図」と呼ぶ.

(a) 天球面上で図 1 のように見える天体が, 図 3–図 4 に示すような 6 つの場合の奥行き・速度構造を持つときの位置-速度図を, 図 2(右) にならって概念図として示せ.

(b) 「膨張する円環」と「収縮する円環」を観測的に区別する方法を提案せよ.

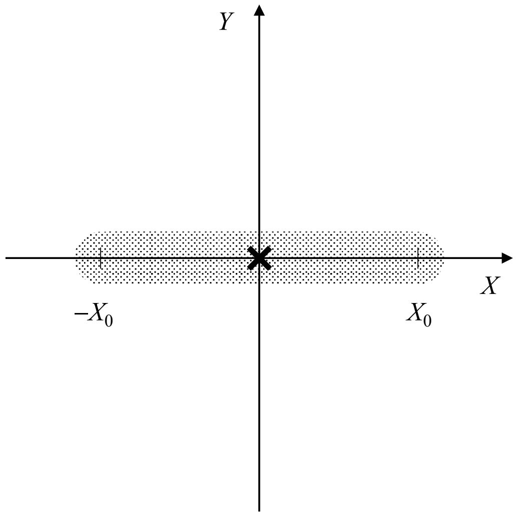


図 1: 天球面上でのガスの空間分布. ×印の位置には星が存在している.

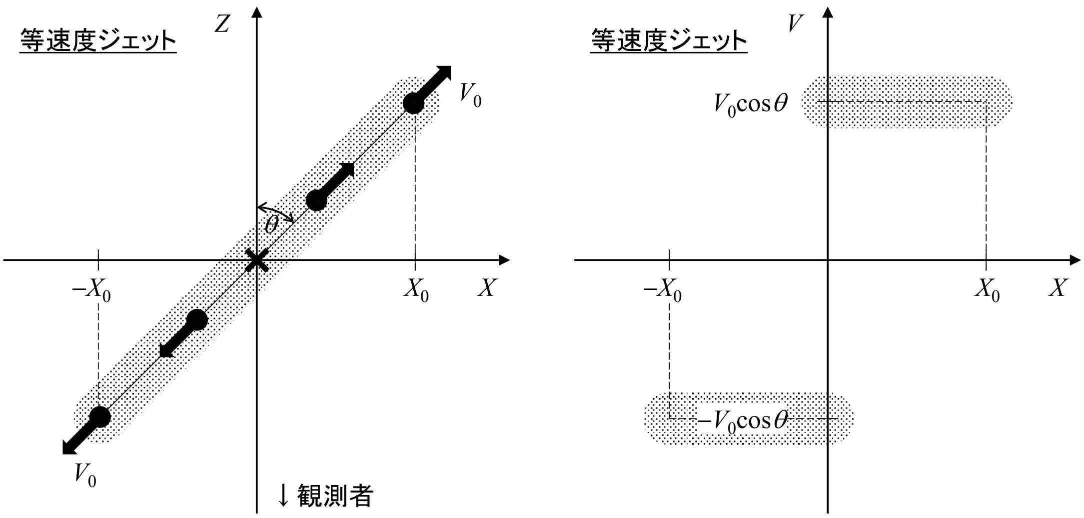


図 2: $+Y$ 軸方向から見たときの「等速度膨張するジェット」の空間構造 (左) と, $X$ 軸に沿って作成した位置 ($X$)-速度 ($V$) 図 (右). 観測者は $-Z$ 方向から観測しているものとし, 速度は観測者から遠ざかる方向 (赤方偏移) を正とする. 図中のベクトルは速度の方向と大きさを表す.

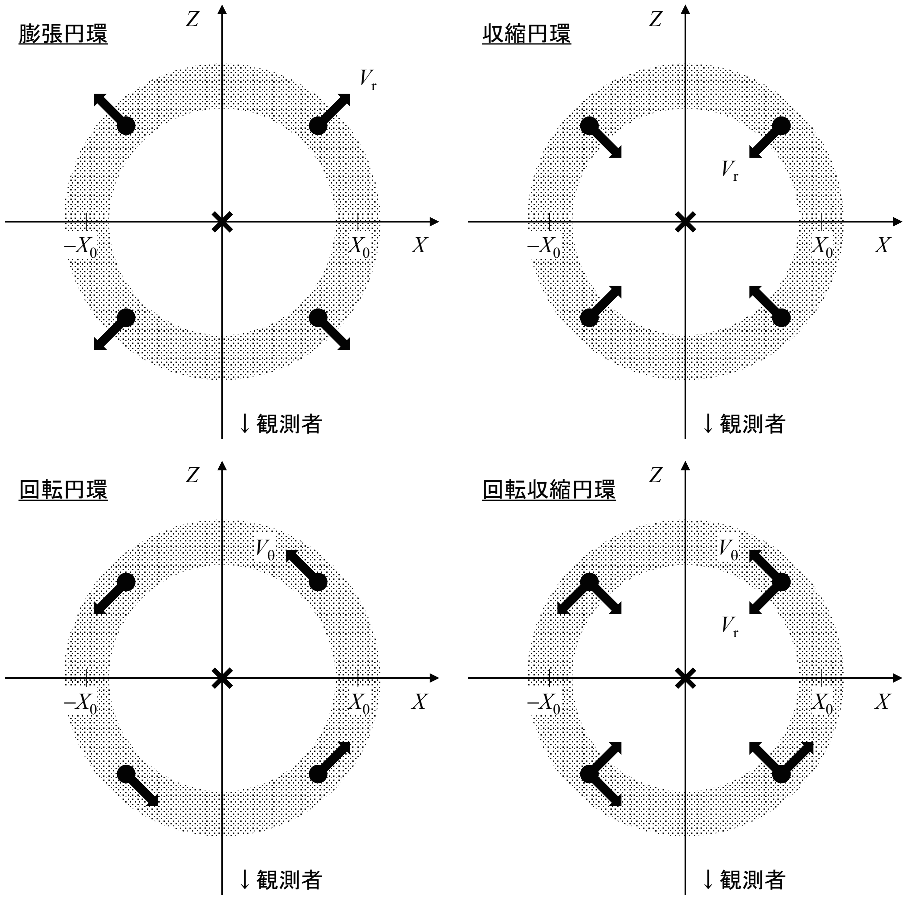


図 3: $+Y$ 軸方向から見たときの「膨張する円環」,「収縮する円環」,「回転する円環」,「回転しつつ収縮する円環」の空間・速度構造. ただし, 膨張・収縮の速度を $V_r$, 回転の速度を $V_\theta$ とする.

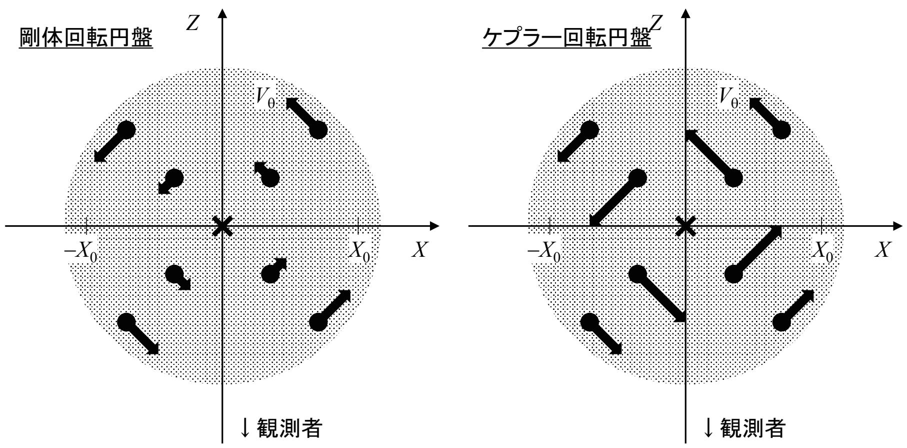


図 4: $+Y$ 軸方向から見たときの「剛体回転する円盤」および「ケプラー回転する円盤」(円盤の質量が小さく, 中心星の重力が支配的な場合) の空間・速度構造. ただし, 円盤の最外周での回転の速度を $V_\theta$ とする.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)