

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

2021 年度修士・博士課程入学試験問題

## 専 門 科 目 1

2020 年 8 月 25 日（火） 10 時 00 分–10 時 45 分

[注意事項]

1. 問題は、この表紙を含めて全部で 3 ページである。
2. 解答においては、適宜、考え方や計算の過程も記述すること。

## [専門科目 1]

ブラックホールは重力が強く時空のゆがみが大きいため、光さえも脱出できない天体である。球対称なブラックホールにおいて光が脱出できない球状の領域の半径は、シュバルツシルト半径と呼ばれる。いま、シュバルツシルト半径が  $a$  である球対称ブラックホールが存在するとして、その周辺を通過する光子の軌跡について考える。図 1 のように、原点がブラックホールの中心に一致し、光子が通過する軌道面内で定義された 2 次元極座標  $(r, \phi)$  を用いると、光子の軌跡を表す関数  $r(\phi)$  は以下の微分方程式を満たすことが知られている。

$$\frac{d^2 r}{d\phi^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 - r + \frac{3}{2}a = 0 \quad (1)$$

このとき、以下の設問に答えよ。なお、本問の解答にあたっては問題文中に与えられた情報以外に一般相対性理論の知識を必要とすることはない。

問 1. 光子の軌跡が原点を中心とする円となる場合、その半径を求めよ。

問 2. 関数  $r(\phi)$  の代わりに  $u(\phi) \equiv 1/r$  という新たな関数を導入し、式 (1) を  $u(\phi)$  に関する 2 階の微分方程式に書き換えよ。

問 3. 問 2 で求めた微分方程式を積分して以下の式のように書くとき、 $V(u) = u^2 - au^3$  となることを示せ。なお、以下の式で  $C$  は任意の積分定数を表す。

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 + V(u) = C \quad (2)$$

問 4. 問 3 で与えられた  $V(u)$  を  $u$  の関数として図示せよ。 $V(u)$  の極値、およびそれを与える  $u$  の値についても記入すること。ただし、 $u$  の範囲は  $0 < u \leq 1/a$  とせよ。

問 5. 図 1 に示したように無限遠からブラックホールに向かう光子を考える。 $r \rightarrow \infty$  のときに  $r \sin \phi = b$  となる定数  $b$  (インパクトパラメーターと呼び、 $b > 0$  とする) を定義するとき、 $b$  を用いて式 (2) の定数  $C$  を表せ。

問 6. 問 5 と同じく、図 1 のように無限遠からブラックホールに向かう光子を考え、無限遠での初期条件として  $\frac{du}{d\phi} > 0$  とする。もし、 $0 < u \leq 1/a$  の範囲で常に  $\frac{du}{d\phi} > 0$  が満たされるなら、光子はシュバルツシルト半径に到達する。このような条件を満たすインパクトパラメーター  $b$  の範囲を求めよ。

問 7. 実際のブラックホールではシュバルツシルト半径内 ( $r \leq a$ ) から光子が出てこないため、ブラックホールを遠方から見たときに一様な背景光に対して暗い影となる領域 (ブラックホールシャドウ) ができる。問 6 で考察した光子の軌跡を逆向きにたどると、問 6 で求めたインパクトパラメーターの範囲がこのようなブラックホールシャドウの半径を与える。このことを用い、あるブラックホールを観測したときにブラックホールシャドウの半径が  $3.0 \times 10^7$  km だったとして、このブラックホールの質量  $M$  が太陽の何倍かを有効数字二桁で求めよ。ただし、計算式も記述すること。ここで、シュバルツシルト半径  $a$  は  $a = 2GM/c^2$  で与えられ、重力定数  $G = 6.7 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>、光速  $c = 3.0 \times 10^8$  m s<sup>-1</sup>、太陽質量  $M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30}$  kg を用いよ。

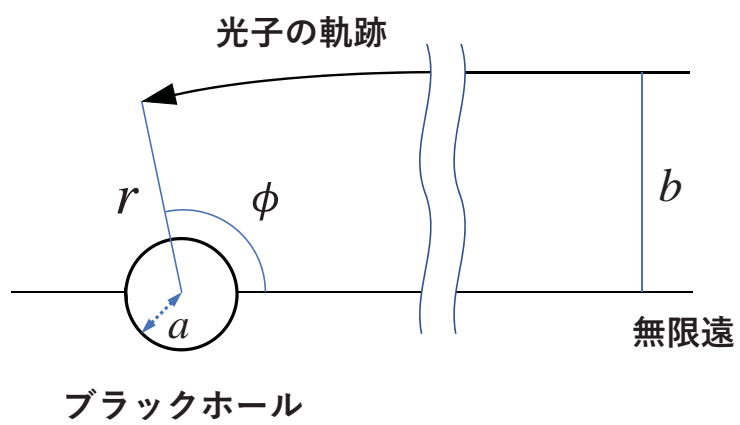


図 1: ブラックホール周辺を通過する光子の軌跡の模式図.