東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

2021 年度修士・博士課程入学試験問題

# 専　門　科　目　2

2020 年 8 月 25 日（火）　　11 時 15 分–12 時 00 分

[注意事項]

1. 問題は，この表紙を含めて全部で 4 ページである．
2. 解答においては，適宜，考え方や計算の過程も記述すること．

## [専門科目 2]

媒質中の電磁場について考える. 媒質中に電荷は無いが, 電気伝導度は考慮する必要があるとする. このとき, 媒質中での 電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{H}$ は以下の Maxwell 方程式を満す.

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H}) = 0 \quad , \quad \nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = 0$$

ここで, $\epsilon$ は誘電率, $\mu$ は透磁率, $\sigma$ は電気伝導度で媒質毎に決まっている実定数である. なお $t$ は時間を表す.
以上の式から, 電場及び磁場は以下の 2 階微分方程式を満す.

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

また, 真空中では誘電率が $\epsilon_0$ であって, 真空中での電気伝導度はゼロである. さらに, ここで考える媒質の透磁率は真空の透磁率と同一であって常に $\mu$ を用いるものとする.
このときに以下の問いに答えよ.

問 1. 複素屈折率 $N$ と真空中での電磁波の伝搬速度 $c$ を用いて表した $+z$ 軸方向に進む, 角振動数 $\omega$ の単色平面波を

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(-i\omega(\frac{N}{c}z - t)\right) \quad , \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \exp\left(-i\omega(\frac{N}{c}z - t)\right)$$

と表す. ここで、$\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ は定数ベクトルとする. これらが 式 (1) および式 (2) の解となるとき, 複素屈折率 $N$ を $\epsilon$, $\sigma$, $\omega$, $\epsilon_0$ だけを用いて示せ. 計算の過程も示すこと.

問 2. 図 1 のように $z = d$ で接する 2 つの異なる媒質中の電磁波を考えよう．電場と磁場の方向と平面波の進行方向は互いに垂直であることを考慮し, $+z$ 軸方向に進む平面波が, $z = d$ の $xy$ 平面でどのように変化するかを考える．$z < d$ を媒質 1 , $z > d$ を媒質 2 とし、複素屈折率をそれぞれ $N_1$, $N_2$ とする．

ここで図 2 の電場の進行方向で, 媒質 1 内では入射波

$$E_{Ix} \exp\left(-i\omega(\frac{N_1 z}{c} - t)\right) \quad , \quad H_{Iy} \exp\left(-i\omega(\frac{N_1 z}{c} - t)\right)$$

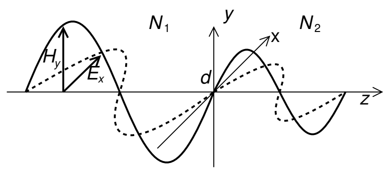

図 1: 入射波と進行波

反射波

$$E_{Rx} \exp\left(i\omega(\frac{N_1 z}{c} + t)\right) \quad , \quad H_{Ry} \exp\left(i\omega(\frac{N_1 z}{c} + t)\right)$$

そして, 媒質 2 内では進行波

$$E_{Fx} \exp\left(-i\omega(\frac{N_2 z}{c} - t)\right) \quad , \quad H_{Fy} \exp\left(-i\omega(\frac{N_2 z}{c} - t)\right)$$

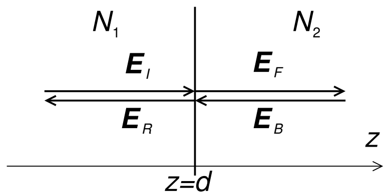

図 2: 入射波, 反射波, 進行波, 逆行波の進行方向

逆行波

$$E_{Bx} \exp\left(i\omega(\frac{N_2 z}{c} + t)\right) \quad , \quad H_{By} \exp\left(i\omega(\frac{N_2 z}{c} + t)\right)$$

とする．

(a) 入射波, 反射波, 進行波, 逆行波における磁場の振幅 $H_{Iy}, H_{Ry}, H_{Fy}, H_{By}$ を, 電場の振幅 $E_{Ix}, E_{Rx}, E_{Fx}, E_{Bx}$ と媒質 1,2 の複素屈折率 $N_1$, $N_2$ および $\epsilon_0$, $\mu$ を用いて示せ．

(b) 境界面 $z = d$ における電場及び磁場の満すべき境界条件を全て式としてあげよ．

(c) 媒質 1 における電場と媒質 2 における電場との関係を行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} E_{Fx} \\ E_{Bx} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} E_{Ix} \\ E_{Rx} \end{pmatrix}$$

という形式で表すとする．このとき,

$$b_1 = \exp\left(i\omega\frac{N_1 d}{c}\right) \quad , \quad b_2 = \exp\left(i\omega\frac{N_2 d}{c}\right)$$

とおくことで, 行列 $\boldsymbol{A}$ を以下のように表すことができることを示せ．

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2N_2}\begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & 1/b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_2 + N_1 & N_2 - N_1 \\ N_2 - N_1 & N_2 + N_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

(d) $d = 0$ として, 複素屈折率 $N_1$ の媒質 1 から複素屈折率 $N_2$ の媒質 2 への入射波を考えたとき, 媒質 2 での逆行波が無い場合に, 境界面での反射率を計算過程を示しつつ求めよ．

問 3. 図 3 のように $z < 0$ の空間を占める複素屈折率 $N_1$ の媒質から $0 < z < d$ の複素屈折率 $N_2$ の媒質を挟んで $z > d$ の空間を占める複素屈折率 $N_3$ の媒質への $+z$ 軸方向に進む入射波を考える. ここで, 光源は $z < 0$ の遠方にのみ存在するとし, $z > d$ の空間には $+z$ 軸方向に進行する透過波 $E_T$ のみが存在している.

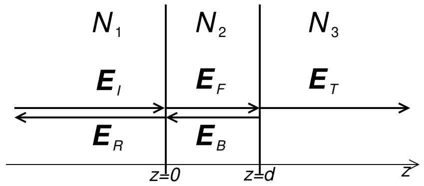


図 3: 平面波の電場の進行方向

(a) $z = 0$ の面での反射率を求めよ. ただし,

$$b_2 = \exp\left(i\omega\frac{N_2 d}{c}\right)$$

を用いてよい. 反射率は複素屈折率を用いて表現し, 計算過程も記述すること.

(b) 媒質 1, 媒質 2, 媒質 3 は電気伝導度がゼロで複素屈折率が実数でそれぞれ $N_1 = n_1$, $N_2 = n_2$, $N_3 = n_3$ である物質としよう. さらに

$$\omega\frac{n_2}{c}d = \pi/2$$

のとき, 反射率を最小にする $n_2$ とそのときの反射率を計算過程を示した上で求めよ.