受験番号	
氏　　名	

東京大学大学院理学系研究科天文学専攻

令和7年度修士・博士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

令和6年8月20日（火）　　13時30分–17時30分

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題冊子は, この表紙を含めて全部で13ページである. 答案用紙は各問につき1枚, 計4枚配付してある. 確実に配付されていることを確かめよ.
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び答案用紙の汚れ等に気づいた場合は, 手を挙げて監督者に知らせること.
4. 問題は数学1問, 物理学2問, 天文学1問の計4問である. 全問解答せよ.
5. 問題冊子の表紙右上の所定欄に受験番号及び氏名を必ず記入せよ.
6. 各答案用紙の所定欄に, 「科目名と問題番号」, 「受験番号」, 及び「氏名」を必ず記入せよ. 「科目名と問題番号」は “数学”, “物理学1”,“物理学2”, “天文学” などのように, 科目と番号で記入せよ.
7. 解答は各問ごとに1枚の答案用紙を使用せよ. 必要なら裏ページを使用してもよい.
8. 解答できない場合でも, 4枚全ての答案用紙に問題番号, 受験番号, 及び氏名を必ず記入して提出せよ.
9. 草稿用紙は別に4枚配付するが, 足りなくなった場合は手を挙げて請求すること.
10. 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない.
11. 解答においては, 途中の計算過程をなるべく省略せずに記述すること.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[数学]

ベッセル関数に関する以下の問いに答えよ.

問 1. 第一種ベッセル関数 $J_n(x)$ は, 以下のベッセルの微分方程式の解となる.

$$\frac{d^2J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0 \tag{1}$$

ここで n を非負の整数, x は実変数とする. このとき, $J_n(x)$ は次のように級数展開でき, a_m を求めることで $J_n(x)$ を導出できる.

$$J_n(x) = x^k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{2}$$

以下の (a)〜(d) に答えよ. ただし, ここでは k が非負の整数の場合のみ考える.

(a) 式 (2) をベッセルの微分方程式 (1) に代入し,

$$C_0 a_0 + C_1 a_1 x + \sum_{m=2}^{\infty} C_m x^m = 0 \tag{3}$$

という形にした際の係数 C_0, C_1, C_m を求めよ.

(b) k と n の間に成り立つ関係式を導出せよ.

(c) m が奇数の場合の項 a_m を求めよ.

(d) m が偶数の場合の項 a_m を求めよ. ここで, $a_0 = 1/n!$ とする. ただし, $m = 2p$ ($p = 0, 1, 2, \cdots$) として, p と n を用いて表せ.

問 2. 以下では n が負の整数である場合も含めて考える。複素数 z に関する複素関数

$$f(z) = \exp\left\{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \tag{4}$$

は第一種ベッセル関数 $J_n(x)$ の母関数となり, ローラン展開によって

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n \tag{5}$$

のように, すべての整数 n についての和で表される. ここで x は実変数とする.

(a) $J_n(x)$ を次のように積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(x, \theta) d\theta \tag{6}$$

で表したとき, 被積分関数 $F(x, \theta)$ を求めよ. $F(x, \theta)$ は実関数とする. なお, $f(z)$ の特異点 z_0 の周りでのローラン展開は, 係数 c_n をもちいて

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)(z - z_0)^n \tag{7}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{8}$$

で表される. ここで, C は複素平面上にある閉曲線を反時計回りに回る積分経路である.

(b) これまでの結果と周期関数の性質等に注意して, $J_{-n}(x)$ と $J_n(x)$ の間に成り立つ関係式を導出せよ.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

[物理 1]

等しい質量を持つ 2 つの星 A, B（質量 M の質点とみなしてよい）が互いの重力で束縛された連星系をなしており，2 つともその共通重心の周りを半径 r の円軌道に沿って公転しているとする（図 1 参照）．このような連星系では, 重力波が放射されるために系のエネルギーが少しずつ失われ, 近似的に円軌道を保ったまま徐々に軌道半径が減少していく．ただし, 連星系の軌道周期程度の時間内では重力波の影響は無視でき, その間の運動はニュートン力学に従うとしてよい．重力定数を G, 光速度を c として, 以下の設問に答えよ．

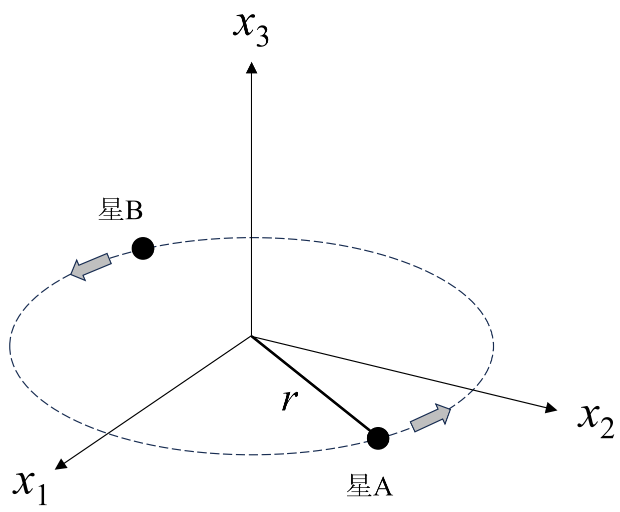

図 1: 星 A, B の軌道運動の模式図．2 つの星は共通重心を中心とする半径 r の円軌道上を角速度 ω で公転している．x_1, x_2, x_3 は三次元直交座標の軸を表し, 連星系の軌道は x_1-x_2 平面内にあるとする．また, 軌道上の矢印は公転の向きを表す．

問 1. 重力波の影響は無視できるとして, 星の角速度 ω を, G, M, r を用いて表せ．

問 2. 重力波の影響は無視できるとして, 連星系の全エネルギー E（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）を, G, M, r を用いて表せ．

次に, 連星系の円運動に伴って放射される重力波のエネルギー放射率（単位時間あたりに重力波として放射されるエネルギー）を求めよう．一般相対性理論によれば, このような連星系から放射される重力波のエネルギー放射率 $P_{\rm GW}$ は以下の放射公式で与えられる．

$$P_{\rm GW} = \frac{G}{5c^5}\left\langle \sum_{i,j=1}^{3} \dddot{I}_{ij}^{\,2} \right\rangle \tag{1}$$

上式において記号 $\langle\rangle$ は軌道周期あたりの平均値を表す．また, $\dddot{I}_{ij}$ は連星系の四重極モーメント I_{ij} の三階時間微分であり, I_{ij} は以下の式で表される．

$$I_{ij} = M\left(x_{i,{\rm A}}x_{j,{\rm A}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}r^2\right) + M\left(x_{i,{\rm B}}x_{j,{\rm B}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}r^2\right) \tag{2}$$

ここで, 添え字 i および j は図 1 で示した三次元直交座標の軸を表し, $1, 2, 3$ のいずれかの値をとる．また, 添え字 A, B は星 A または B の座標であることを表す．さらに, δ_{ij} は $i = j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 である．

問 3. 時刻 $t=0$ で星 A が $(x_{1,\mathrm{A}}, x_{2,\mathrm{A}}, x_{3,\mathrm{A}}) = (r, 0, 0)$ に位置していたとして, 時刻 t における連星系の四重極モーメント I_{ij} の各成分を, M, r, ω, t を用いて表せ. ただし, r および ω の変化は無視できるとする. また, 解答中で用いる三角関数は $\sin 2\omega t$ および $\cos 2\omega t$ のみとすること.

問 4. 重力波のエネルギー放射率 P_{GW} を, G, c, M, r, ω を用いて表せ. ただし, 軌道周期内での r および ω の変化は無視できるとする.

上で得られた結果をもとに, 軌道周期よりはるかに長い時間が経過したのち, 連星系の軌道半径 r が時間 t とともにどのように変化するかを求めよう.

問 5. 連星系の全エネルギー E が重力波放射のみによって減少するとし, 問 2 と問 4 の結果を用いて, 時間変化する軌道半径 $r(t)$ が満たすべき微分方程式をたてよ. ただし, 問 1 の結果を用いて ω を消去すること.

問 6. 上で求めた微分方程式を解き, 軌道半径 $r(t)$ を求めよ. また, その概形をグラフに示せ. ただし, 初期条件として $t=0$ における半径を $r(0)=r_0$ とせよ. また, 軌道半径が初期値 r_0 の半分になる時刻 t_{h} を求めよ.

[物理学 2]

一酸化炭素分子 (CO) のような, 異なる質量 m_1, m_2 を持つ 2 つの核子と複数の電子から構成される, 自由に運動する二原子分子のエネルギー準位を考える. 電子が常に基底状態にあるとすると, この系は, 核子 1, 2 がポテンシャルエネルギー $V(r)$ 中で運動しているとみなすことができる. ここで r は核子間の距離である. $V(r)$ は図 1 (左) のように $r = r_e$ で最小値 V_e をとり, 2 つの核子は回転運動および $r = r_e$ を平衡距離とした振動運動を行う.

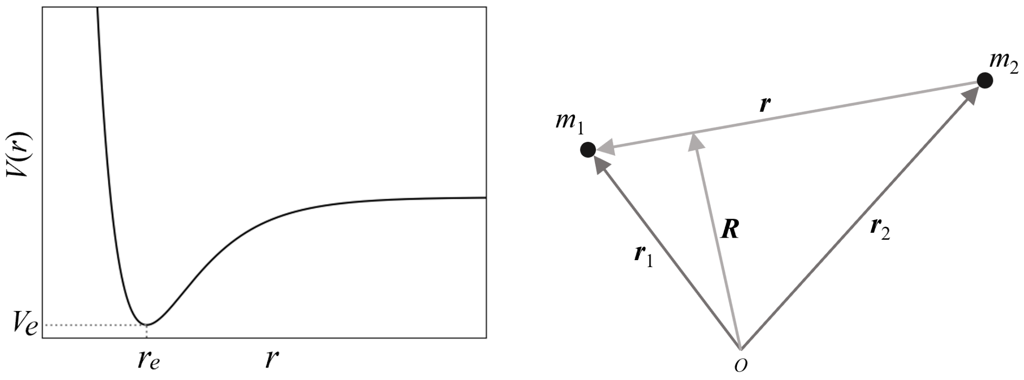

図 1: $V(r)$ の概略図 (左) と, 二原子分子の核子の座標 (右).

本問では $V(r)$ が既知であるとして核子の波動方程式に着目する. 図 1 (右) のように核子の座標をとると, 核子の波動方程式は,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(r)\right)\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = E\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \tag{1}$$

と書ける. ここで $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ は核子 1, 2 の位置ベクトルであり, 核子間の距離は $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ と表される. また ∇_1^2, ∇_2^2 は $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ についてのラプラシアン, プランク定数を h として $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, E はエネルギー固有値, $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ は核子の波動関数である. 式 (1) を解くことで核子の振動・回転遷移を考える. 以下の問いに答えよ.

問 1. (a) 核子の重心座標 $\boldsymbol{R} = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$ と相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ を定義し, $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}$ の三次元直交座標系の第一成分をそれぞれ x_1, x_2, X, x, 換算質量を $\mu = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$, 総質量を $M = m_1 + m_2$ とすると,

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{M}\frac{\partial^2}{\partial X^2} \tag{2}$$

が成り立つことを示せ.

(b) 式 (1) を, 重心座標と相対座標を変数とする波動関数 $\psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$ の波動方程式に座標変換せよ. ただし重心座標のラプラシアン $\nabla_R^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial Y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial Z^2}$ と相対座標のラプラシアン $\nabla_r^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を用いよ. ここで $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}$ の三次元直交座標系の第二成分を Y, y, 第三成分を Z, z とする.

(c) 上の (b) で得られた波動方程式に対し, 重心運動の波動関数 $\Phi(\boldsymbol{R})$ と相対運動の波動関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ 用いて, $\psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{R})\phi(\boldsymbol{r})$ のように変数分離を行う. 重心運動のエネルギー固有値 E_R, 相対運動のエネルギー固有値 E_r として, $E = E_R + E_r$ である. 重心運動と相対運動それぞれの波動方程式を求めよ.

問 2. (a) 問 1 で得られた相対運動の波動方程式に対し, 極座標 (r, φ, θ) を用いて

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\phi_r(r)}{r} Y(\varphi, \theta) \tag{3}$$

のように変数分離を行う. $\phi_r(r)$ に対する動径方向 r の波動方程式は, 回転による遠心力項を $W(r)$ として, 有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + W(r)$ 中を一次元運動する波動方程式に帰着する. $W(r)$ を求めよ.

ただし, 極座標のラプラシアン $\nabla^2_{r,\varphi,\theta}$ は,

$$\nabla^2_{r,\varphi,\theta} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla^2_{\varphi,\theta}\right) \tag{4}$$

$$\nabla^2_{\varphi,\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{5}$$

で与えられること, 及び球面調和関数 $Y_{lm}(\varphi, \theta)$ が

$$\nabla^2_{\varphi,\theta} Y_{lm}(\varphi, \theta) + l(l+1) Y_{lm}(\varphi, \theta) = 0 \tag{6}$$

を満たすことを用いよ. ここで l は回転量子数 $l = 0, 1, 2, \cdots$ であり, m は $|m| \leq l$ を満たす整数である.

(b) 振動運動が $r = r_e$ の周りの微小振動であるとし, $V(r) \approx V_e + \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 (r - r_e)^2$ と近似する. 遠心力項 $W(r)$ は $r = r_e$ の周りで一定とみなし $W(r_e)$ で置き換えられるとする. 相対運動のエネルギー固有値 E_r を求めよ. ただし, 角振動数 ω の調和振動子のエネルギー固有値は, $n = 0, 1, 2, \cdots$ を振動量子数として, $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ であることを用いてよい.

問 3. 問 2 (b) で得られた相対運動のエネルギー固有値 E_r について, 振動量子数 n と回転量子数 l の組を用いて量子状態を (n, l) で表記し, 始状態を $(n, l) = (n_i, l_i)$, 終状態を $(n, l) = (n_f, l_f)$ とする. 一酸化炭素のような二原子分子でみられる, $\Delta n = n_f - n_i = 1$, $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$ の遷移を考える. 相対運動の始状態のエネルギー固有値 $E_r = E_{r,i}$ から終状態 $E_r = E_{r,f}$ への遷移エネルギー $\Delta E = E_{r,f} - E_{r,i}$ について, 次の問に答えよ.

(a) 遷移が $\Delta n = 1$, $\Delta l = 1$ $(l_i \geq 0)$ を満たす時, ΔE を l_i の関数として求めよ.

(b) 遷移が $\Delta n = 1$, $\Delta l = -1$ $(l_i \geq 1)$ を満たす時, ΔE を l_i の関数として求めよ.

[天文学]

太陽とその周囲を公転する物体についての以下の問いに答えよ．光速度を c, 重力定数を G とし，現在の太陽の質量を $M_{\rm S}$, 光度 (単位時間当たりに放たれる放射の全エネルギー) を $L_{\rm S}$, 半径を $R_{\rm S}$ とする．

問 1. 太陽から距離 d の円軌道を半径 r, 質量 m の球状の固体微粒子が公転している．この固体微粒子の表面は反射率 100% のなめらかな鏡面と見なせる．また，この固体微粒子に入射する太陽光は平行光で近似できる．以下の問いに答えよ．

(a) 図 1 のように，エネルギー ϵ を持つ 1 個の光子が固体微粒子の表面の A の位置で反射した状況を考える．この光子が固体微粒子に与える運動量の，太陽から固体微粒子に向かう方向の成分を求めよ．固体微粒子の中心から A に向かう方向と太陽に向かう方向がなす角を θ とする．

(b) 太陽の放射がこの固体微粒子に及ぼす力を求めよ．

(c) この固体微粒子の公転周期を求めよ．

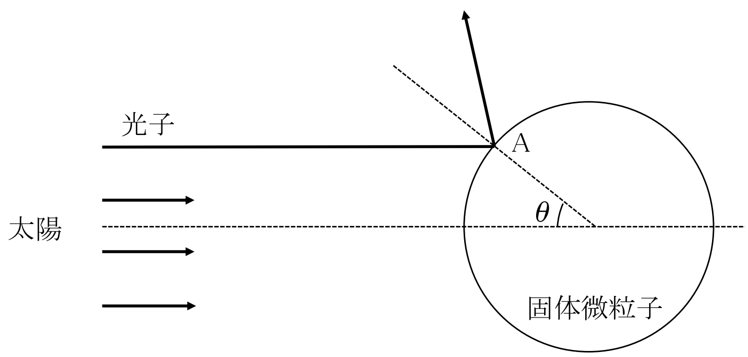

図 1: 固体微粒子の表面での光子の反射の模式図．

問 2. もし太陽の内部の圧力が突然なくなったとすると，太陽は自身の重力で収縮し，数千秒で潰れてしまう．太陽を圧力のない物質でできた一様密度の球であると仮定して，回転のない静止した状態から出発して 1 点に潰れるまでの時間を求めよう．

(a) 収縮開始時 (時刻 $t = 0$) に球の中心から距離 R_0 ($< R_{\rm S}$) にあった質量 μ の小さい物質素片を考える．この素片の時刻 t での中心からの距離を R, その時間微分を $\dot{R}$ として，この素片のエネルギー保存の式を書け．R_0 の異なる物質間での追い抜きは起きないと仮定してよい．

(b) (a) の式から R の時間発展を解いて，R_0 から出発した物質素片が中心に到達するまでの時間を求め，R_0 への依存性を答えよ．計算に必要であれば，θ を変数として $R = R_0 \cos^2\theta$ という置換を用いてよい．

問 3. 太陽は将来主系列を離れ，膨張しながら周囲に質量を放出する．それに伴い，地球の公転軌道半径も変化する．太陽質量の 30% が失われたとき，太陽表面がその時点での地球の公転軌道にちょうど達したとする．このときの太陽の半径は現在の何倍か，有効数字 2 桁で求めよ．現在の太陽の視半径 (地球から見た太陽の見かけの半径を天球上の角度で表した値) は $0.^\circ 27$ である．

なお, 以下を仮定してよい. (i) 質量放出は地球の公転周期に比べてゆっくりと球対称に進行し, 放出された物質は地球の公転軌道より十分外側に広がる. (ii) 放出物質や他の惑星が地球に与える影響, 太陽と地球間の潮汐作用, および太陽からの放射圧は無視できる. (iii) 地球の公転軌道は常に, 太陽を中心とした円で近似できる.

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)

(草稿に使ってもよい. ただし, 切り離さないで用いよ.)